Gabriel Torreão

Sobre os Ombros de Gigantes
— MECÂNICA —

Publicação Independente • 2017 (1ª distribuição)

Versão digital disponivel em
`sites.google.com/view/sobreosombrosdegigantes`.

Os créditos do material utilizado neste livro estão disponíveis em
`sites.google.com/view/sobreosombrosdegigantes/o-livro/créditos`.

Os colaboradores do livro estão listados em
`sites.google.com/view/sobreosombrosdegigantes/o-livro/colaboradores`.

Este livro faz uso extensivo de *softwares* livres, listados em
`sites.google.com/view/sobreosombrosdegigantes/o-projeto/softwares-livres`.

Edição e distribuição digital independente.
1ª distribuição de 20 de janeiro de 2017.

Sumário

Prefácio

"Se vi mais longe foi por estar de pé sobre ombros de gigantes." *Isaac Newton*

"Então Deus disse: 'Façamos o homem à nossa imagem e semelhança. Que ele reine sobre os peixes do mar, sobre as aves dos céus, sobre os animais domésticos e sobre toda a terra, e sobre todos os répteis que se arrastem sobre a terra.'"

Gênesis 1:26

Nossos corpos e almas estão intimamente ligados para nos formar como um só. E nestes tempos de tanta dificuldade de entender a moral e as coisas do espírito, não seria diferente que crescesse a nossa dificuldade em ter afinidade com "toda a terra", a natureza que nos foi disposta para reinarmos e que nos é tão estranha.

Livros das séries iniciais de física tem se assemelhado perigosamente a revistas e manuais de instruções. A rica história dos experimentos e do suado labor dos cientistas que nos possibilitou vislumbrar de tão longe alguma regularidade na natureza é completamente esquecida na necessidade desesperada de decorar fórmulas, de treinar para processos seletivos e de embelezar as páginas com ilustrações multicoloridas e pirotecnia.

Sem a exposição paciente e detalhada, a física ganha ares esotéricos como verdade absoluta, e o empirismo ganha status de revelação. A compreensão correta, porém, só é possível com muito esforço, procurando nas entrelinhas das entrelinhas um conhecimento que está além do exposto. Os conceitos físicos,

portanto, se perdem em meio a tão pouca explanação e tanta ilustração. O aluno já não é capaz de compreender porque estuda, de onde vem o conhecimento, e para onde vai.

As tão louvadas contextualização e interdisciplinaridade, em uma física tão mal fundamentada, se tornam impossíveis ou apenas boas desculpas para, em virtude da necessidade desesperada de se associar diversos assuntos, o estudo resultante ser vago e superficial, como uma especie híbrida que dá errado, não goza das virtudes de seus parentes, e estéril, é incapaz de dar frutos.

Este livro tem a pretensão de retomar a humildade dos antigos cientistas, inspirado pela declaração de Newton que abre este prefácio, se propõe a retomar a glória de discutir a física, mesmo em nível básico, com fidelidade às fontes e exposição clara das limitações e sucessos destes poucos séculos de estudo sistêmico da física. Tem ainda a pretensão de incluir o que for possível da filosofia subjacente a esta ciência, de modo que se vá além do calculismo e que se construa um entendimento no qual se perceba que conforme os fenômenos se entrelaçam resulte, com muito esforço de nosso intelecto, o que chamamos de realidade, e que ela seja minimamente lógica e compreensível.

Capítulo 1

Introdução à Física

> *"A suprema tarefa do físico consiste em procurar as leis elementares mais gerais, a partir das quais, por pura dedução, se adquire a imagem do mundo. Nenhum caminho lógico leva a tais leis. Seria antes exclusivamente uma intuição a se desenvolver paralelamente à experiência."*
>
> *Albert Einstein*

Sumário

Este capítulo pode não ser o mais longo, o mais exaustivo, o mais exato ou, sequer, o mais matemático desta obra, mas é sem dúvida o *mais importante*. Isto porque, para começo de conversa, apesar da física ser uma disciplina obrigatória para todos os

alunos brasileiros de ensino médio (e às vezes até mesmo de fim de ensino fundamental), muitos alunos concluem o ensino básico sem saber o que é a física. Além disso, a despeito da doutrina matemática e voltada para resolução de problemas semelhantes aos aplicados em concursos ser tão disseminada no Brasil, a física vai muito além da exatidão e calculismo explorados neste método.

Este desconhecimento das origens e reais objetivos desta ciência, em parte, justificam o típico desgosto, desprezo e nojo que afloram nos alunos quando pensam na física, já que confundem o que é a verdadeira física com a distorção que tem se tornado a física ensinada nas escolas. O tratamento matemático, os cálculos e as questões de concurso são efeitos colaterais frutos, principalmente, das dificuldades essenciais que surgem quando é necessário avaliar e classificar um aluno. Não quero dizer que as questões de concurso devem ser colocadas de lado ou que a matemática não tem papel crítico na física. A resolução de problemas, oriundos ou não de concursos, tem sido uma forma de divulgação, motivação, fixação e didática dentre as ciências exatas desde a antiguidade, e a física se apropria das ferramentas matemáticas para atingir seus objetivos, como o próprio aluno deverá concluir ao aprofundar seu estudo, mas a matematicidade *não é o objetivo da física*. Apesar disto, problemas de concurso são muitas vezes bem elaborados e didáticos, devendo ser utilizados no ensino da física sempre que oportuno. Deve-se atentar, porém, que o foco do estudo não deveria ser o treino para aprovação em um concurso, mas sim que a aprovação em concursos é uma mera consequência do estudo.

Não se deve estudar para ser aprovado em concursos. A aprovação é uma consequência do êxito na aprendizagem. A motivação para estudar reside em questões morais, filosóficas, econômicas e sociais muito mais profundas e impossíveis de serem tratadas nesta obra.

Os papiros de Moscou e de Rhind, que datam de 1850 a.C. e 1650 a.C., respectivamente, trazem, juntos, 110 problemas matemáticos e são parte das melhores fontes sobre história da matemática egípcia [1].

Toda esta retórica tem a única finalidade de evidenciar a importância do que é a física, e mais ainda, da importância de saber o que é a física.

1.1 Um Pouco sobre Ciência e o Método Científico

Antes de falar sobre a física, é válido falar sobre as ciências em geral. O homem é dotado de uma capacidade de abstração que o permite classificar, encontrar regularidades, construir, repetir suas construções, criar novas tecnologias e tentar explicar as

razões destas regularidades. Historicamente, constata-se que todo conhecimento era concebido, registrado e repassado das formas mais diversas, cabendo aos cientistas e aos detentores destes conhecimentos a fazê-los como melhor lhes conviesse. Na pré-historia e na antiguidade, atribui-se muito do que se concebeu ao acaso. Conjectura-se, por exemplo, que as técnicas para confecção de vidros foram dominadas quando os primeiros exemplares destes materiais se formaram acidentalmente com o aquecimento do solo por fornos e fogueiras.

Areia é predominantemente formada por silício, e o vidro por óxido de silício. Por esta razão, o aquecimento de areia resulta em alguma forma de vidro.

Com o aumento da complexidade das descobertas humanas, a concepção de novos conhecimentos passou a ser feita quase exclusivamente por meio de *experiências*, executadas por estudiosos, alquimistas, metalúrgicos, mecânicos, artesãos, artífices, entre outros. É o método popularmente conhecido como tentativa e erro. Quando a tentativa é feita de forma exaustiva, porém, os especialistas passam a conhecer bem o comportamento daquilo com o que experimentam.

Quando estas experiências passaram a, necessariamente, ser moldadas para a produção de algum fato de forma sistêmica e controlada, estes experimentadores passaram a observar regularidades que se supunha serem universais e gerais, tal era a precisão do que percebiam. Desta forma, começa a nascer a ciência como ela é hoje. Esta forma de construir conhecimento, ou de fazer ciência, de forma sistêmica é o que se denomina *método científico*.

Diversos textos de variados cientistas e filósofos abordam o método científico. O que apresentamos aqui é uma ideia geral, e não um procedimento específico, para que se entenda que deve ser seguida uma sistemática, uma organização, com clareza de ideias e exposição, independente de qual seja.

MÉTODO CIENTÍFICO

Método Científico é a forma organizada e sistêmica como trabalha o cientista para obter êxito na investigação que procede.

São muitas as motivações que levam um indivíduo ou um grupo a aprofundar-se em determinada área de conhecimento, mas principalmente a necessidade, a curiosidade e a busca pela verdade. Por esta razão, e pelas particularidades do estudo e da tecnologia da época, também são variados os procedimentos em particular que o cientista escolhe para levá-lo a compreensão de determinado fenômeno. O que há em comum entre estes procedimentos é o que define o método científico, resumido esquematicamente na Figura 1.1.

Uma das motivações de Tycho Brahe, nobre dinamarquês, para estudar astronomia, era sua intenção de reforçar o geocentrismo, mas, na busca da verdade, seu sucessor Johannes Kepler, acabou por consagrar o heliocentrismo.

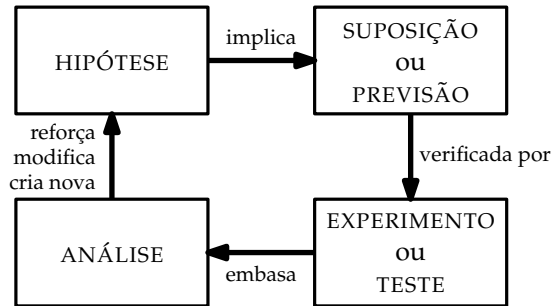



Figura 1.1: Diagrama de fluxo resumido do método científico.

Uma *hipótese* inicial sempre é necessária no processo científico. Ela pode originar-se na intuição, no conhecimento popular, na observação ordinária, ou na observação criteriosa feita por meio de estudo e pesquisa, ou seja, ela deriva de quaisquer experiências prévias que tenhamos e que nos forneçam as evidências iniciais para decidirmos por ela.

> HIPÓTESE
> Hipótese é uma teoria provisória utilizada para explicar um tipo de fenômeno, sendo aceita como guia para novas investigações ou assumida verdadeira para argumentação e testes.

Como em uma investigação criminal, a hipótese é baseada no que o investigador já conhece. As previsões ou suposições apontarão onde devem estar as próximas pistas ou evidências para que as buscas não sejam feitas às cegas (o que também pode ser feito, tanto na investigação criminal como na ciência). O teste ou experimento é o ato da busca destas provas e evidências.

Como implicação lógica da hipótese inicial, são feitas suposições ou previsões.

> SUPOSIÇÃO OU PREVISÃO
> Suposição ou Previsão é uma afirmação que deriva por implicação lógica da hipótese.

Por exemplo, da hipótese "a Terra é chata", supõe-se ou se prevê por implicação lógica direta que "um navegador cairá pela borda se se afastar demasiadamente do continente". As previsões ou suposições podem então ser postas à prova por meio de experimentos ou testes cujos resultados servirão para análise da hipótese que originou tais suposições.

EXPERIMENTO OU TESTE
Experimento ou Teste é um aparato ou procedimento desenvolvido ou executado pelo cientista com a finalidade de verificar a veracidade das suposições e previsões.

Em nosso exemplo, o teste de "circunavegação da Terra" executado pelos portugueses ao início do século XVI, indicou que a previsão de que "um navegador cairá pela borda se se afastar demasiadamente do continente" era falsa, e consequentemente também o é a hipótese de que deriva logicamente, ou seja, o correto seria "a Terra não é chata".

EVIDÊNCIA
Evidência é o fato gerado pelas experiência ou testes que nos permitirá analisar a veracidade das suposições ou previsões.

As evidências são fatos ocorridos durante os testes ou experimentos, é aquilo que ocorreu, que foi observado, e é o que há de mais confiável na ciência. Já a interpretação que se faz sobre os fatos, são fruto da criatividade do cientista, e portanto é sujeita a discussão e análise. Por esta razão que temos a expressão "contra fatos não há argumentos".

A análise, por fim, faz uso das novas evidências oriundas da experimentação, o que levará ao reforço da hipótese inicial, caso os experimentos com ela estejam de acordo, ou à necessidade de modificação da hipótese (com base nas novas evidências) ou na criação de uma completamente nova, como em nosso exemplo em que passa-se a negar completamente a hipótese "a Terra é chata", e adota-se exclusivamente a hipótese "a Terra é redonda", tendo todos experimentos e testes feitos até hoje sobre as implicações de tal hipótese reforçado sua validade.

ANÁLISE
Análise é o processo no qual o cientista confronta a hipótese inicial e suas previsões ou suposições com o resultados dos experimentos ou testes.

Há casos em que as evidências são compatíveis com mais de uma hipótese, ou seja, tanto uma hipótese como outra, apesar de distintas, geram as mesmas previsões e suposições e estão de acordo com as experiências. Uma ferramenta interessante que se utiliza na análise para avaliar as hipóteses é conhecida como *Navalha de Occam*.

> NAVALHA DE OCCAM
> Entre diversas hipóteses equivalentes, a que fizer menos assunções deverá ser escolhida.

Este princípio evidencia a necessidade de manter as coisas simples na ciência.

A Tabela 1.1 resume várias hipóteses e o resultado da aplicação do método da Figura 1.1.

Observe que o método que apresentamos na Figura 1.1 é cíclico e que a criação e modificação das hipóteses ocasiona uma evolução da ciência (por meio da evolução de suas hipóteses) semelhante àquela enunciada por Darwin, que ocorre por meio da seleção natural. Uma analogia à este processo evolutivo é apresentado na Figura 1.2, onde os pontos representam evidências e as figuras geométricas hipóteses.

As hipóteses se adaptam à realidade (ou às evidências), ou equivalentemente, só as hipóteses mais fortes sobrevivem aos testes e experimentos. A força da hipótese neste caso se mediria pela sua capacidade de adesão à verdade.

Para concluir, devemos ressaltar que embora o tema que abordamos nesta seção tenha o nome de *método*, o que soa rígido e mecânico, todas as suas etapas exigem criatividade e geniosidade daqueles que as praticam. Apontar onde devem estar as evidências, por meio de previsões e suposições, elaborar experimentos para levantar estas evidências, analisar os dados, e até compor hipóteses são tarefas de criação que até então não há metodologia ou procedimento que defina como deve ser feito que seja eficaz em qualquer situação da ciência, inclusive porque, se assim fosse, a ciência seria uma linha de produção, o desenvolvimento de nosso conhecimento seria certo e o trabalho da individualidade de nossos cientistas irrelevante.

1.1.1 Modelos na ciência

"Uma teoria que você não possa explicar a um garçom provavelmente não é nada boa."

Ernest Rutherford

O aeromodelo é um modelo de avião, não um avião, o modelo atômico é um modelo de átomo, não um átomo. O homem tem a certeza de que os modelos que cria *não são a realidade*, por melhor que estes modelos a representem.

> MODELO
> Modelo é um mecanismo conceitual por meio do qual tenta-se explicar o que há subjacente a um conjunto de hipóteses sobre um determinado fenômeno.

Tabela 1.1: Exemplos da aplicação do método da Figura 1.1.

HIPÓTESE	PREVISÃO	EXPERIMENTO	ANÁLISE e/ou NOVA HIPÓTESE
Terra é chata	navegador cairá pela borda	circunavegação	Terra não pode ser chata
Terra é redonda	navegadores desaparecerão além do horizonte mas poderão voltar	viagem transatlântica	nau desaparece na horizonte mas não caiu por qualquer borda, reforçando a hipótese
	sombra da Terra na Lua em eclipse ou fases da Lua será redonda	observar projeção da Terra em eclipse e luas crescente e minguante	forma arredondada escurece a Lua aos poucos, reforçando hipótese
	a Terra se projetará redonda na retina de observador suficientemente longe	cosmo navegação	a Terra é vista redonda, reforçando hipótese
átomo ocupa espaço onde há matéria	partículas se chocarão com bloco de matéria	bombardeio de folha de ouro com partículas	átomo é na maior parte vazio
abiogênese	surgirão larvas na putrefação oriundas da matéria que apodrece	observar putrefação de matéria orgânica protegida por tela	biogênese / as larvas provém de ovos da mosca
energia infinita é necessária para atingir a velocidade da luz	nada ultrapassa a velocidade da luz	neutrino exibe velocidade maior que a da luz em experimento em 2011	dentro da margem de erro do experimento o neutrino poderia estar abaixo da velocidade da luz / hipótese inicial não pode ser descartada

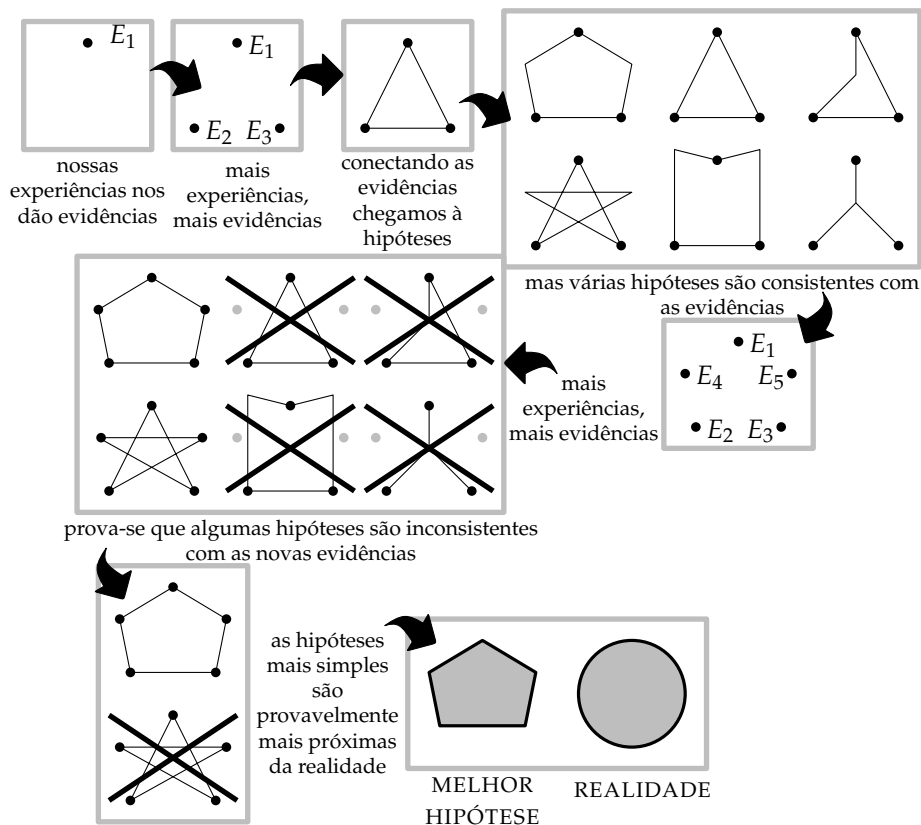



Figura 1.2: Analogia do funcionamento da evolução das hipóteses [2].

O cientista dispõe basicamente de dados: observações, medidas, descrições; e de hipóteses, que são meras proposições, e, portanto, abstratas. A importância dos modelos são tal que alguns fenômenos sequer podem ser compreendidos senão pela visualização provida pelo modelo. O exemplo clássico é o do modelo atômico. Ninguém jamais viu um átomo, muito menos uma partícula subatômica, e ouso dizer que jamais verá. Como é possível compreender um fenômeno que sequer se pode ver sem que haja um modelo? Imagine explicar o que é um átomo a um aluno lhe entregando uma pilha de dados e observações e um conjunto de hipóteses e dizer simplesmente "isso é um átomo". Nós humanos precisamos de algum mecanismo para assimilar aquilo que tentamos entender, assim, conseguimos não só compreender, mas compreender mais rapidamente e melhor. Com o modelo atômico, particularmente, uma infinidade de tecnologias como os microcomputadores, o laser, e o microscópio eletrônico, puderam ser concebidas.

O átomo não é visto diretamente. O que se observa é o resultado de sua interação, inclusive sobre artefatos macroscópicos.

1.1.2 Matemática para a ciência

O leitor já deve estar familiarizado com vários usos da matemática, principalmente aqueles mais cotidianos e mais óbvios. Com matemática quantifica-se o valor de bens através do dinheiro, obtém-se medidas de comprimento, de massa, elabora-se códigos e linguagens, entre uma infinidade de outras aplicações. Pode-se resumir esta utilidade da matemática definindo

> MATEMÁTICA
> Matemática é uma ferramenta de descrição fundamentada na lógica e que goza de precisão, objetividade e concisão.

Observe a Tabela 1.2. Nela descrevemos uma cadeira ordinária por meio do português (outra ferramenta de descrição) e da matemática. Agora imagine entregar estas duas descrições a marceneiros. A Figura 1.3 mostra os possíveis resultados construtivos. Dentro da mesma descrição em português, várias cadeiras podem ser construídas de acordo com a especificação. Já a descrição matemática leva a um resultado único.

Este exemplo ilustra o poder da descrição matemática. Uma infinidade de outros exemplos poderiam ser aqui elencados

A descrição matemática aqui apresentada faz uso abundante do português para que se adeque ao nível da capacidade de descrição do ensino médio, mas é possível fazê-la inteiramente matemática. A descrição de modelos tridimensionais como os da Figura 1.3 é armazenado em computadores por meio apenas da matemática.

Infinitos modelos diferentes de cadeira poderiam ser feitos em conformidade com a descrição em português da Tabela 1.2, com a matemática há uma *única* possibilidade.

Tabela 1.2: Diferenças entre a descrição matemática e a do português de uma cadeira.

PORTUGUÊS	MATEMÁTICA
tem assento quadrado espesso	tem acento em formato de paralelepipedo de base quadrada de lado 40 cm e espessura de 2 cm
tem encosto retangular mais fino que o assento que se encaixa em suave ângulo aberto com o assento	tem encosto em formato de paralelepipedo de base retangular de dimensões 40 cm × 60 cm, espessura de 1 cm, formando um ângulo de 95° com o assento
tem quatro pés cilíndricos médios localizados levemente afastados das bordas do assento	tem quatro pés cilíndricos de 4 cm de diâmetro e 40 cm de altura localizados nas pontas da cadeira e distântes 1 cm das extremidades do assento

(a) Descrição em português.

(b) Descrição matemática.

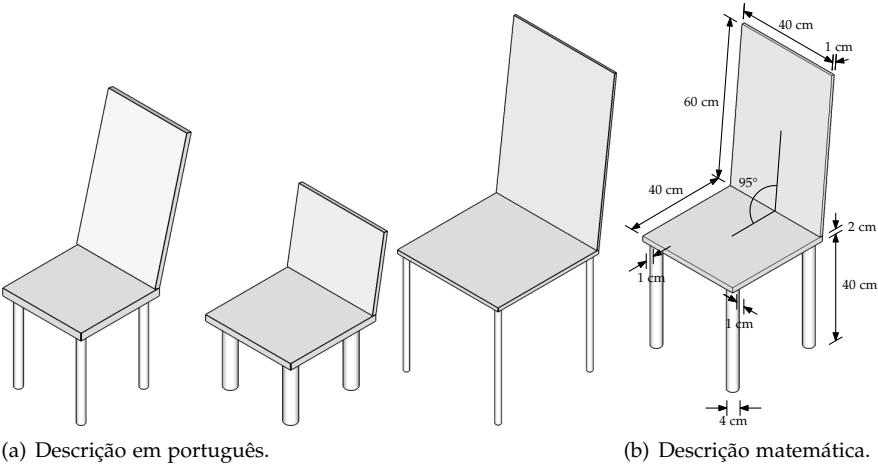



Figura 1.3: Possíveis resultados construtivos baseados nas descrições da Tabela 1.2

em adição àqueles no primeiro parágrafo desta seção, mas o texto ficaria demasiado longo. Esta característica da matemática encaixa-se com a seção anterior quando percebemos que a matemática serve apenas como uma representação da realidade, e, portanto, como um modelo.

A série de televisão Numb3rs, do canal americano CBS, constrói seu enredo em torno de um professor de matemática que auxilia seu irmão do FBI a resolver crimes descrevendo situações relacionadas ao crime com a matemática, ampliando a capacidade de analisar as evidências conhecidas.

MODELO MATEMÁTICO
Modelo Matemático é uma construção elaborada com entidades matemáticas para descrever a realidade.

Como exemplo de modelos matemáticos, vamos considerar uma máquina, denominada caixa de Galton [3], que este cientista apresentou em sua obra Natural Inheritance, cuja ilustração reproduzimos de seu livro na Figura 1.4. Esta máquina consiste em uma passagem afunilada superior por onde passam bolinhas até que atinjam uma das divisórias inferiores. Para chegar a estas divisórias inferiores, a bolinha colide com uma série de pinos. Uma das condições necessárias para o bom funcionamento da máquina é que ao passar por uma das camadas horizontais, a bolinha sempre colida com um dos pinos da camada inferior.

A condição para bom funcionamento é atingida utilizando uma configuração de posicionamento de pinos conhecida como *quincunx*, que é aquela utilizada no posicionamento das marcações do 5 em um dado cúbico: ⚄.

Podemos, então, modelar a caixa de Galton pelas seguintes hipóteses:

i. Uma bolinha bate necessariamente em um pino de cada camada horizontal de pinos, e;

ii. Ao bater em um pino, a bolinha tem probabilidade $\frac{1}{2}$ de desviar para esquerda $\frac{1}{2}$ de desviar para a direita.

Com base nestas hipóteses, podemos representar um caminho em particular como uma sequência de esquerdas-direitas, tantas quantas forem as camadas da caixa de Galton em particular. Na Figura 1.5(e), por exemplo, ilustramos uma destas caixas com 5 camadas, bem como um caminho particular no qual a bolinha desvia para direita, esquerda, esquerda, esquerda e direita em cada uma das camadas horizontais de pinos sucessivas. Simplificando a nomenclatura e denominando desvio para esquerda por e e para a direita por d, podemos nomear um caminho neste exemplo como uma configuração de 5 letras, sendo a primeira delas a direção do primeiro desvio, a segunda

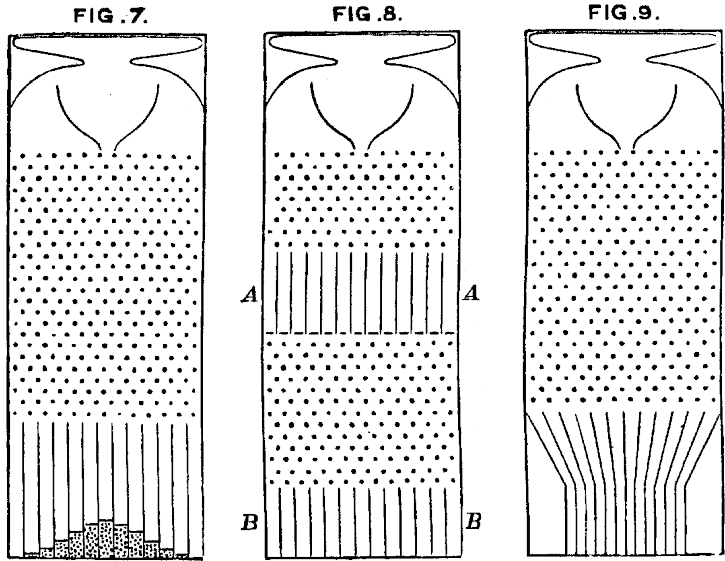



Figura 1.4: Caixa de Galton conforme ilustração apresentada em seu livro Natural Inheritance de 1889 [3].

a do segundo e assim sucessivamente. No exemplo da Figura 1.5(e), o caminho descrito seria nestas definições denominado *deeed*.

Construímos, então, seis caixas de Galton, de complexidade crescente. Aquela mais simples, com apenas uma camada horizontal de pinos é mostrada na Figura 1.5(a), e tem apenas duas possibilidades, cair na divisória inferior esquerda (*e*), ou na direita (*d*), cada uma delas com probabilidade $1/2$ de acordo com nossa hipótese. A caixa com duas camadas horizontais, ilustrada na Figura 1.5(b), tem três possibilidades para a bolinha: cair na divisória inferior esquerda, seguindo necessariamente a trajetória *ee*, na central, podendo atingi-la pelas trajetórias *ed* e *de*, ou a direita que pode ser atingida apenas pela trajetória *dd*. Desta forma, havendo quatro trajetórias possíveis, podemos verificar que, como a cada passagem por uma camada horizontal a probabilidade de que haja um determinado desvio é $\frac{1}{2}$, cada trajetória em particular, composta de dois desvios, terá probabilidade de ser seguida $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. As divisórias esquerda e direita, tendo apenas umas trajetória possível para atingi-las,

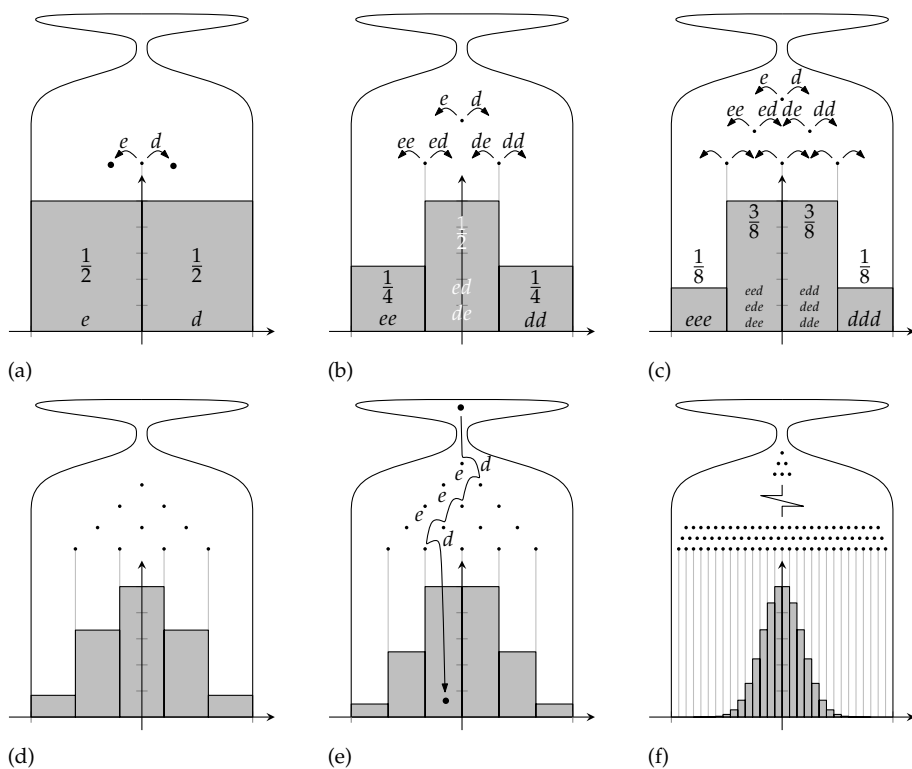



Figura 1.5: Modelos da caixa de Galton para 2, 3, 4, 5, 6 e 30 possíveis posições para as bolinhas.

deverão conter $\frac{1}{4}$ das bolinhas totais que forem lançadas, cada. Já a central, deverá conter $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, já que duas trajetórias levam ao centro.

Para seguir nossa explicação sobre este exemplo, estamos lançando mão de definições da matemática que poderão não ser familiares para o aluno no início do ensino médio, como *mutuamente excludente*, *complementar*, e *evento*. O aluno com dificuldades de compreender esta seção é encorajado a lê-la superficialmente para perceber o poder da matemática como ferramenta de descrição e seguir adiante, ou procurar compreendê-la completamente com auxílio de um livro de matemática de Ensino Médio, ou de um profissional formado em áreas correlatas.

Seguindo o raciocínio apresentado, a Figura 1.5(c) mostra esta caixa com 3 camadas horizontais de pinos e já apresenta as concentrações esperadas de bolinhas e as trajetórias possíveis para cada divisória. As outras caixas de Galton da Figura 1.5 possuem 4, 5 e 29 camadas horizontais de pinos, e ênfase foi dada apenas à concentração das bolinhas em cada uma das divisórias com o intuito de ilustrar a concentração de possibilidades próximo ao centro e a acentuada diminuição da concentração nas divisórias marginais.

Perceba que a cada camada, a bolinha tem duas possibilidades mutuamente excludentes e complementares: desvia para a esquerda ou para a direita, e que, em nosso modelo, o desvio nas camadas anteriores não afeta o desvio na camada atual. Se observarmos as divisórias inferiores a partir da mais à esquerda, notamos que ela só pode ser atingida se a bolinha sempre desviar para a esquerda. No caso da caixa da Figura 1.5(c), por exemplo, pela trajetória *eee*. A divisória que se segue a ela, precisa que em qualquer ponto da queda, a bola desvie uma única vez para direita, ou seja, as possibilidades *eed*, *ede* e *dee* todas cairão na segunda divisória da esquerda para a direita neste mesmo exemplo. Na subsequente o raciocínio é similar, devendo haver exatamente dois desvios no total para a direita, ou seja, *edd*, *ded* ou *dde*. Percebe-se, então, que a divisória inferior na qual a bolinha cai depende exclusivamente da quantidade total de desvios à direita que a bolinha executa, ou seja, de sucessos do evento "desviar à direita", coincidindo exatamente com o modelo de Distribuição Binária apresentado, por exemplo, em [4].

A Distribuição Binária, que coincidiu com nossa caixa de Galton, serve para descrever inúmeros outros fenômenos que se comportam de maneira similar. Os modelos matemáticos permitem, portanto, agrupar fenômenos, já que diversos fenômenos, de natureza também diversa, acabam sendo descritos com o mesmo modelo matematicamente. Ou seja, no mundo real, fenômenos aparentemente desconexos, como juros simples e movimento uniforme, são, matematicamente descritos *exatamente* da mesma forma.

A distribuição das bolinhas dentro das divisórias da caixa

de Galton também aparece de forma muito semelhante na distribuição de uma infinidade de outros exemplos, como na estatura de homens adultos, na distância de um tiro ao centro de um alvo quando alvejado, no tamanho de peças obtidos em uma determinada planta de fabricação, ou no peso real de um pacote de alimentos embalados. Observe que as divisórias são quantidades discretas, e o modelo é idêntico para dados contínuos divididos em classes. Os matemáticos porém, já elaboraram um modelo para as grandezas contínuas, que utiliza matemática de ensino superior, mas que pode ser facilmente compreendido. Neste modelo utiliza-se a chamada *função densidade de probabilidade* dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \tag{1.1}$$

em que f é proporcional a densidade de probabilidade para que se obtenha o valor x, μ é a média ou valor esperado de x e σ é o seu *desvio padrão*. Isso significa que a o valor de $f(x)$ cresce para os valores de x que são mais prováveis. Esta distribuição, tão ampla é sua aplicação e ocorrência, é chamada *distribuição normal* e a curva de seu gráfico tem forma de sino e chamada de *gaussiana*, em homenagem ao matemático alemão Carl Friedrich Gauss. Dentre os exemplos que citamos, pesos de alimentos, estatura, distância do centro da alvo, são todas possíveis medidas contínuas x, mas que podem perfeitamente ser divididas em classe para que se encontre uma distribuição discreta como a da caixa de Galton.

Quantidades *discretas* são aquelas que contamos com números inteiros, como a quantidade de livros numa sala, ou a idade de uma pessoa. Quantidades *contínuas* são aquelas que medimos com números racionais ou reais, como a massa de uma pessoa, a distância do centro do alvo ao local onde um tiro o atingiu. Quando dividimos uma quantidade contínua em classes, como nas pontuações obtidas numa disputa de dardo, onde o alvo é subdividido em discos discretos, esta quantidade contínua é *discretizada*. Além disso, mais uma vez reforçamos: nossa intenção nesta seção é mostrar o poder da descrição matemática, e com isso aumentamos gradualmente a complexidade do exemplo. Se o leitor não consegue compreender completamente os exemplos, é encorajado a seguir e retomar o texto quando tiver maior maturidade nos assuntos.

A Figura 1.6 mostra uma caixa real de Galton juntamente com uma curva, certamente obtida a partir da Equação 1.1.

Para verificar a ocorrência desta distribuição, eu realizei um levantamento da duração de 1761 músicas em meu acervo. Verifiquei que nelas, a duração média de uma música é de aproximadamente $\mu = 158{,}37\,\text{s}$ e o desvio padrão de $\sigma = 51{,}33\,\text{s}$. Distribui os dados em classes de 10 em 10 segundos, e elaborei o gráfico desta distribuição em classes juntamente com a Equação 1.1 de onde obtive o gráfico exibido na Figura 1.7. Observe que o modelo de distribuição normal encaixa muito bem também para descrever a distribuição da duração de músicas.

Com estes exemplos, onde expusemos a caixa de Galton, a Distribuição Binomial, a Distribuição Normal, e suas amplitu-

Figura 1.6: Resultado de experimento com caixa de Galton real obtida em [5].

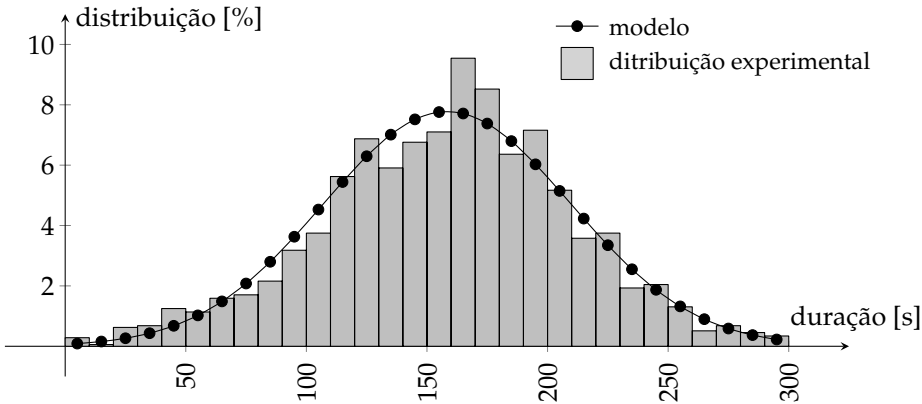



Figura 1.7: Divisão em classes da duração de 1761 músicas e gráfico da Distribuição Normal esperada para estes dados.

des de aplicação, quisemos mostrar como a descrição por meio de modelos matemáticos é poderosa, precisa e flexível. Nas seções que se seguem, sobre a física propriamente, mostraremos, então, porque tanto se utiliza a matemática na física, embora a razão já deva estar clara para o leitor a esta altura.

1.1.3 Validade e credibilidade da ciência

Esperamos que tenha ficado claro na seção 1.1 que todo o nosso conhecimento científico tem suas bases nas hipóteses apresentadas pelos cientistas. Queremos que fique ainda mais claro: por mais entusiasta, metódico, preciso ou rígido que seja o cientista e seus métodos, e mesmo que impere nele e na sociedade a *certeza* das verdades do que ele fala:

Poderíamos também acrescentar famoso à lista.

Toda ciência é construída em hipóteses.

Nunca poderemos, portanto, ter certeza absoluta da verdade das proposições da ciência. Isto é verdade porque nunca conseguiremos realizar todos os testes para coletar todas as evidências em favor de nossa hipótese, sendo assim, nossa hipótese sempre partirá de um conjunto limitado de experiências e tentará inferir sobre o geral. Ou seja, só seria possível provar ser uma hipótese verdadeira por meio de um número infinito de experimentos.

Pesquise brevemente sobre atrocidades cometidas na história da medicina, mesmo a história recente, e constate que a biologia básica de ensino fundamental é suficiente para que se verifique o quão fracas eram as hipóteses da época e como estes estudiosos parecem bárbaros aos olhos de nosso conhecimento atual.

Se nunca saberemos se o que é enunciado pela ciência é verdade, como podemos confiar na ciência?

Sabendo que toda ciência não passa de especulação, quase sempre especulação bem fundamentada, é verdade, mas especulação de toda forma, pode-se tomar proveito e utilizar com confiança hipóteses científicas se:

i. for conhecido o método utilizado para se chegar a elas, ou seja, as evidências são claras e foram obtidas de forma honesta;

ii. o cientista as publicou para crítica da comunidade;

iii. elas sobreviveram a grande quantidade de testes realizados, e;

iv. são conhecidas as limitações em que elas podem ser aplicadas com sucesso.

O item i evitará que se caia na lábia de charlatões. Não se pode confiar no trabalho pelo simples fato de ele estar travestido de científico. Deve-se conhecer quais os experimentos realizados, de que forma, com o auxílio de que equipamentos, por quantas repetições, por que equipe, financiado por quem, além de quaisquer outras variáveis que possam introduzir viés às hipóteses apresentadas.

Se um homem de ciência não sabe com que fundamentos aplica seus métodos, ele certamente não é um homem de ciência, é um charlatão.

Além disso, o homem, mesmo o cientista mais metódico, comete erros, que podem ser apontados pela comunidade científica. Ao publicar o seu trabalho, como sugerido no item ii, o cientista o abre à críticas e a testes que poderão ser realizados de forma mais ampla por toda comunidade, o que dará ao seu trabalho mais credibilidade a medida que suas hipóteses forem seguidamente confirmadas e portanto reforçadas pela experiência, como sugerido no item iii.

Por fim, muitas hipóteses não correspondem exatamente à realidade, mas são muito próximas a ela, principalmente em condições especiais, já que os experimentos que levantaram estas hipóteses em geral precisam ser feitos também em condições limitadas. Einstein, por exemplo, mostrou que para velocidades muito altas, comparáveis com a velocidade da luz, a mecânica de Newton falha. Isto não significa que as hipóteses propostas por Newton são erradas ou inúteis, muito pelo contrário, para maioria das aplicações, como a construção civil e em máquinas ordinárias, a mecânica de Newton é só o que é utilizado, mesmo hoje, mais de 100 anos após a constatação de Einstein, o que significa que conhecendo as limitações das hipóteses, como sugerido no item iv, pode-se aproveitar sua validade.

A mecânica de Newton foi a primeira de grande relevância publicada em 1687, tendo explicado inúmeros fenômenos mecânicos, e será estudada em capítulo de dinâmica a ser apresentado em distribuição futura desta obra.Apenas no início do século xx Einstein mostrou que ela poderia não ser a melhor representação da realidade e falhar em alguns experimentos.

1.1.4 Falseabilidade

PRINCÍPIO DA FASEABILIDADE
Toda hipótese científica tem que ser falsificável, ou seja deve estar sujeita a testes que possam tentar mostrar que a hipótese é falsa [6].

Falsificável no contexto ora apresentado significa que a teoria é sujeita à refutação por meio da experiência.

Este é um aspecto adicional muito interessante pois permite um critério objetivo na distinção daquilo que é científico e o que é não-científico. O método apresentado na seção 1.1 sequer poderia ser aplicado a uma hipótese não falsificável, já que não

é possível testá-la, reforçar sua aplicabilidade ou refutá-la, ou seja, ela não está sujeita à análises ou críticas.

Tendo em vista que um dos aspectos mais importantes da ciência para sua credibilidade é a análise e as críticas feitas pela comunidade a respeito daquilo que é enunciado pela ciência, impedir esta análise com propostas não falsificáveis implica em não fazer ciência. Embora não estejamos querendo desvalorizar as proposições não-científicas, principalmente aquelas religiosas ou oriundas da tradição, o critério da falseabilidade é importante para possibilitar a distinção clara entre o que é e o que não é científico, ficando a cargo dos indivíduos dar-lhes importância ou credibilidade conscientes da natureza da proposição.

1.2 A Física

Física é a ciência que lida com matéria, energia, movimento e força. Esta é a definição comumente encontrada em dicionários e artigos diversos sobre física. É uma definição triste por envolver quatro outras definições e não deixar claro as razões subjacentes ao surgimento destas definições, nem das origens que levaram o homem a estudar a física. Uma ciência, em geral, tem um objetivo final. A Tabela 1.3 mostra exemplos de diferentes ciências e os objetivos que procuram alcançar.

> FÍSICA
> Física é a ciência cujo objetivo é compreender e descrever a natureza e os fenômenos naturais.

Por esta definição, que enfoca o objetivo da física, fica claro que trabalhar com matéria, energia, movimento e força é uma mera consequência da descrição atual que fazemos da natureza, pois são destas entidades que se supõe hoje ser composta a natureza. A medida que novos experimentos forem realizados, e outras entidades poderão surgir para possibilitar a descrição de determinados fenômenos naturais que até então não percebemos, ou percebemos e ainda não temos uma explicação satisfatória. A definição que apresentamos neste livro, então, foi escolhida de modo a mostrar claramente o nobre e amplo objeto de estudo da física: *toda a natureza*.

Tabela 1.3: Comparação entre os objetivos de diversas ciências.

CIÊNCIA	OBJETIVO
Geografia	Descrever a Terra.
Biologia	Compreender a vida e os organismos vivos.
Psicologia	Compreender as funções mentais e o comportamento.

Escolha qualquer acontecimento e o desafiamos a mostrar que ele não é condicionado e causado pelo funcionamento da natureza.

Queremos agora deixar claro a nobreza do objetivo da física. Compreender a natureza, do que ela é composta e as regras que restringem o comportamento destas entidades, nos levaria a compreender o universo em toda sua complexidade, mesmo naquelas disciplinas nas quais hoje, pela limitação de nosso conhecimento, não é possível achar uma conexão com o conhecimento físico, como o comportamento humano, os processos econômicos (fundamentalmente influenciados pelo comportamento humano), a origem da vida, já que subjacente a qualquer acontecimento existe um mecanismo natural que o causou. Não sou físico de formação e conheço as limitações do *homo sapiens sapiens*, mas devemos reconhecer que alcançar este objetivo da física levaria enfim à compreensão de *tudo*, indicando possivelmente até caminhos para que se possa responder à questões metafísicas fundamentais, e por esta argumentação, esclarecemos que desenvolver a física é essencial.

1.2.1 Física e Matemática

"Não há ramo da matemática, por mais abstrato que seja, que não possa algum dia ser aplicado a fenômeno do mundo real."

Nikolai Lobachevsky

Os físicos, em sua batalha pela descrição da natureza, esbarraram rapidamente na necessidade de precisão, de abstração e de concisão para sintetizar o entendimento proporcionado pelas experiências. Nada mais natural do que adotar a matemática como linguagem para descrever suas descobertas. Os dados dos experimentos, as evidências levantadas e as hipóteses sugeridas, são em pequena parte concretizadas por meio

de modelos simples como os da seção 1.1.1, e em grande parte como modelos matemáticos nos moldes dos apresentados na seção 1.1.2.

Tão importante são os modelos matemáticos para a física, que Richard Feynman argumenta em [7] que o modelo da gravitação, por exemplo, *é compreensível exclusivamente* pela expressão matemática da força da gravidade. Não foi possível encontrar outra forma de modelar a gravitação consistente com as observação experimentais. Ele chega a extrapolar o que ocorre com a gravitação para argumentar que a matemática sozinha é suficiente para modelar toda a física.

1.2.2 Ramos da Física

Pela nossas limitações, tanto o curto tempo em que temos estudado a natureza, como intelectuais, nossa compreensão da natureza é fragmentada por diversos fenômenos distintos que conseguimos compreender com alguma clareza. Estes fenômenos são, por uma questão de sistemática e didática, organizados no que podemos chamar de *ramos da física*. Resumimos brevemente a seguir alguns destes ramos.

Mecânica

É sem dúvidas o maior ramo da física, e é portanto tem também ramificações. A primeira delas é a cinemática, e engloba o estudo dos movimentos. Já as causas do movimento, que são as forças, são estudadas na dinâmica e na estática. Juntas, a dinâmica e a cinemática possibilitam o entendimento de praticamente todos os equipamentos mecânicos da tecnologia humana.

A hidrodinâmica e hidrostática é a parte da dinâmica e estática que estuda as forças com ênfase nas forças oriundas de fluidos (gases e líquidos).

Termologia

É o estudo dos fenômenos relacionados a temperatura e às transferências de energia térmica. Estuda principalmente eficiência de máquinas, refrigeração, aquecimento.

Eletromagnetismo

Compreende o estudo das partículas carregadas eletricamente, do seu movimento e dos campos elétricos e magnéticos.

Óptica

Estuda os fenômenos associados à luz, principalmente a reflexão, a refração e a difração. É a ciência que possibilita a construção de lentes, dos telescópios e microscópios convencionais, e projetores.

Física Quântica

Estuda os fenômenos que não ocorrem de forma contínua, e sim em "passos", resultado de como percebemos o funcionamento da natureza, principalmente em escala microscópica.

Esta subdivisão do estudo da física tem significado meramente didático e tecnológico. Todos os ramos estão interconectados e os estudiosos, inclusive, tentam encontrar as regras básicas que interfeririam em todos os fenômenos de forma ampla.

1.2.3 Importância do Estudo da Física

Avaliação da Realidade pelo Viés Material

Quando ocupados com nossas atividades, sempre nos confrontamos com a necessidade de avaliar o que fazemos por meio de uma série de pontos de vista. Ora temos que verificar se o que faremos pode nos trazer problemas econômicos, ou se pode ser uma vantagem social, ou ainda pode ser de grande valor moral ou em outros casos, anti-ético. Na maioria das vezes, a realização com sucesso de nossas atividades nos obriga a analisá-los por mais de um ponto de vista, principalmente a medida que a atividade cresce em complexidade. Como um exemplo simples, algumas vezes um novo emprego é financeiramente bom, mas por ser em outra cidade, pode acarretar em dificuldades no convívio familiar. Em um exemplo mais complexo, a instalação de uma usina hidroelétrica pode resolver a situação energética de toda uma região e trazer desenvolvimento, mas tem impactos ambientais e nas famílias afetadas pela área alagada.

Nos exemplos que demos, fizemos questão de contrapor os aspectos materiais, normalmente representados questões concretas, físicas, como dinheiro, energia, infra-estrutura, das outras questões, que vão além do que a física nos pode ajudar

a compreender, e que chamamos de metafísicas e são normalmente mais abstratos e vistos pela religião, pela moral, pela ética e por disciplinas que muitas vezes sequer podem contar com o método científico para desenvolver-se.

Nestes casos, o entendimento da física tem dois papeis fundamentais e graduais. O primeiro é de ser capaz de compreender como as questões materiais, e portanto, físicas afetam nossas atividades. O segundo é, uma vez que se sabe como a atividade é afetada pela realidade física, ser capaz de dar o valor apropriado para as coisas materiais em conjunto com os aspectos metafísicos para conseguir avaliar apropriadamente um determinado problema de modo a ordenar a importância de cada aspecto e ser capaz de tomar decisões e resolver problemas relacionados a esta atividade.

Veja que só é possível se fazer o ordenamento entre as questões materiais e metafísicas quando se tem um bom conhecimento de ambos. Um morador de uma região de alagamento, por exemplo, pode subestimar o valor material da usina pensando "nunca tivemos a usina e sempre vivemos bem", ou "a usina vai acabar com as terras que são da minha família a gerações". Da mesma forma, pode superestimá-la ao pensar "o moço veio aqui e explicou que essa usina vai conseguir dar energia para três cidades do tamanho de São Paulo, só pode ser coisa de Deus". Quando se tem pouco conhecimento sobre um determinado aspecto, portanto, é mais provável que se cometa erro na avaliação do valor que se deve dar a este aspecto.

É preciso que se construa uma base em física, mesmo que dos conhecimentos iniciais abordados no ensino médio, mas que seja sólida, para facilitar as futuras avaliações dos aspectos materiais que surgirão ao longo do desenvolvimento das atividades, mesmo que esta atividade aparentemente não esteja relacionada com questões materiais. Queremos deixar claro, assim, que os aspectos físicos não são os únicos importantes no desenvolvimento de nossas atividades, mas que devemos observar a realidade em todos os seus aspectos, e isso importa em considerar os aspectos materiais e consequentemente em construir uma base sólida em física.

Percepção Interdisciplinar

Com uma visão de mundo clara com respeito aos fenômenos físicos, o indivíduo pode compreender um evento qualquer

por intermédio de mecanismos mais apurados. A física, por lidar com a natureza de forma geral, tem a função em interligar diferentes eventos, como se fosse a cola que une as diferentes disciplinas. A astronomia, a química, a biologia, a psicologia, estão todos interligados por estarem sujeitos às leis do mundo físico, entre uma infinidade de outras disciplinas, além das influências das tecnologias, da história e da filosofia, que estão intimamente ligadas às relações do homem com a física.

Se hoje se prolifera a necessidade do homem compreender o mundo de forma integrada e interdisciplinar, a física tem um papel fundamental na construção das conexões entre as diversas áreas do conhecimento. Ademais, os grandes problemas da humanidade são essencialmente interdisciplinares, sejam eles de cunho simplesmente tecnológico, como robótica, ciborgologia e genética, ou sejam eles políticos, integrando questões geográficas, econômicas ou meteorológicas, resultando numa intrincada rede de influência nos problemas mais complexos, cuja resolução tem sido alcançada apenas por grandes equipes, que confiam à física a base para a interligação e limitações das diversas áreas.

É nestes parágrafos que os naturalistas radicais e protetores irracionais da natureza se contorcem, pois confundem ser espécie dominante e aumentar nosso conforto com eventuais efeitos indesejáveis colaterais que o desenvolvimento tecnológico traga, como se os mesmo fossem introduzidos intencionalmente pelos cientistas e produtores de tecnologia. Livrar-se desses efeitos é também um desafio tecnológico. Pense com cuidado e verifique que os absurdos ambientais e o consumo irresponsável não são consequências do desenvolvimento tecnológico.

Analogia Interdisciplinar

Além de estar na base de outras disciplinas ligadas à fenômenos naturais, mesmo fenômenos que se correlacionam com a física apenas de muito longe, ou que sequer se relacionam com a física, tem seu comportamento semelhante ao de entidades físicas estudadas em um nível mais básico. Assim, é possível associar por meio de analogias o comportamento em outras ciências com o comportamento apresentado nestes fenômenos físicos mais básicos.

Síntese de Tecnologias

Se nós estivermos com nossos interesses alinhados com aqueles apresentados na seção de Visão de Mundo, então estaremos inclinados a aumentar o conforto de nossa espécie, minimizar os riscos de nossa extinção, e perpetuá-la como espécie dominante. Ao conseguir descrever e compreender a natureza, fica ao alcance do homem uma possibilidade de grande responsabilidade: a de interferir sobre ela e controlá-la. Cada novo conjunto hipóteses que ganha credibilidade no meio científico

é logo incorporado em nossas tecnologias com o intuito de permitir este aumento em conforto, e segurança que nossa espécie precisa. Com o desenvolvimento da capacidade produtiva da agricultura nas civilizações egípcias, por exemplo, surgem necessidades de cálculo para o controle dos excedentes da produção, que foram executados com a escrita ou procedimentos rudimentares. Com o domínio da tecnologia de fundição, e construção de mecanismos refinados, foram criadas calculadoras mecânicas e hoje, com o desenvolvimento dos conhecimentos nas áreas do eletromagnetismo, criamos as calculadoras eletrônicas, que fazem bilhões de cálculos em segundos.

Aquele que negar a importância de se desenvolver a tecnologia para aumento de nosso conforto e suprimento de nossas necessidades mais fundamentais, que atire o primeiro iPhone pela janela e mude-se para a primeira caverna que encontrar.

Aplicações Avançadas

Quando se extrapola as potencialidades das tecnologias disponíveis, e das tecnologias que ainda precisam de algum desenvolvimento para se concretizar, uma série de aplicações avançadas passam a ser consideradas. Há diversos exemplos que vão de colonização de outros planetas ao desenvolvimento de fontes inovadoras de energia, ou ao aumento da expectativa de vida do homem de forma natural e saudável. Muitas destas aplicações avançadas ainda são exclusividade da ficção, mas não há como estimar os avanços que poderão ser proporcionados com novas descobertas na física, e nas ciências correlatas.

Capítulo 2

Medidas

Sumário

Como exposto na seção 1.2.1, a física utiliza a matemática para descrever a natureza. A *medição* é o que torna possível transformar a natureza em números ou outras entidades matemáticas. Por esta razão, medição tem hoje proporções tão significativas em termos industriais, tecnológicos e científicos que quase tudo que se precisa saber sobre o assunto encontra-se devidamente normatizado pelos maiores institutos metrológicos e de padronização do mundo. Muito do que apresentaremos com relação à medição neste capítulo, tomaremos por base o Vocabulário Internacional de Metrologia (VIM) [8]

e o Avaliação de Dados de Medição Guia para a Expressão de Incerteza de Medição (GUM) [9]. Como as medidas serão retomadas durante todo o estudo da física, este capítulo poderá ser retomado pelo aluno com frequência, devendo ser usado com referência eventual.

2.1 Grandeza

Grandeza é a propriedade dum fenômeno dum corpo ou duma substância, que pode ser expressa quantitativamente sob a forma dum número e duma referência.

A uma placa de madeira, por exemplo, está associada a grandeza comprimento longitudinal, já que o corpo placa de madeira tem comprimento longitudinal como uma propriedade que pode ser expressa quantitativamente sob a forma dos número e referência: 115,8 cm, por exemplo.

Nós podemos comparar grandezas de mesma *natureza*. A altura de uma mesa, por exemplo, pode ser comparado com o comprimento longitudinal de uma placa de madeira, já que ambas tem a mesma natureza, denominada comprimento. A negação também é verdade: grandezas de naturezas diferentes não podem ser comparadas. Nunca iremos comparar altura de uma cadeira com massa de um estudante.

O que é maior: um estudante de 60 kg ou uma mesa de 1,1 m de altura? O absurdo da tentativa de fazer esta comparação reside no fato das grandezas terem naturezas diferentes.

Em geral, para se chegar a todas as grandezas que quisermos descrever, um conjunto básico de grandezas, chamado *sistema de grandezas*, será suficiente. Assim, teremos todas as grandezas dívididas em uma pequena quantidade de *grandezas de base*, que comporão o sistema, sendo todo o restante *grandezas derivadas* destas grandezas de base.

Comprimento e tempo são exemplos clássicos de grandezas que podem compor a base de um sistema. A grandeza velocidade será nesse sistema expressa como derivada do comprimento e do tempo. Para se analisar estas dependências, caracterizamos as grandezas de base pela *dimensão da grandeza*. Se a grandeza distância percorrida chamarmos de d, denotaremos sua dimensão de comprimento por L, e escreveremos

$$\dim d = \mathsf{L}.$$

Assim como se chamarmos a grandeza comprimento longitudinal de uma placa de madeira de c, teremos $\dim c = \mathsf{L}$, já que ambas as grandezas são de comprimento, e portanto, têm mesma dimensão. Se retomarmos o exemplo da velocidade, e chamarmos a grandeza tempo decorrido de t, então

$$\dim t = \mathsf{T}.$$

Como a velocidade, digamos v, é dada por

$$v = \frac{d}{t},$$

então $\dim v = \mathsf{L}/\mathsf{T}$, ou

$$\dim v = \mathsf{LT}^{-1},$$

que deixa claro que a velocidade é uma grandeza derivada das grandezas comprimento e tempo.

Com a finalidade de estabelecer padrões e unificar a linguagem na ciência, foi criado um Sistema Internacional de Grandezas, que assume sete grandezas de base. Este sistema é resumido na Tabela 2.1.

2.2 Medição

> Medição é o processo de obtenção experimental dum ou mais valores que podem ser, razoavelmente, atribuídos a uma grandeza. A medição implica a comparação de grandezas ou a contagem de entidades.

Esta definição deixa evidente que:

i. na medição, atribui-se valores (geralmente numéricos) às grandezas. Ou seja, a grandeza, uma entidade "real", concreta, é descrita por meio de uma entidade matemática abstrata, aqui chamada genericamente de valor; e

ii. é necessária alguma base para comparar as grandezas, já que é necessário comparar.

Também para atender à rigorosidade comercial, industrial e científica, o item ii nos leva à adotar padrões para comparação, as *Unidades de Medida*.

> Unidade de medida é a grandeza definida e adotada por convenção, com a qual qualquer outra grandeza da mesma natureza pode ser comparada para expressar, na forma dum número, a razão entre as duas grandezas.

Assim, quando dizemos que a grandeza comprimento de um carro, que chamaremos de C é de 4,5 m, estamos dizendo que, se considerarmos a grandeza comprimento da barra de metro padrão, que chamaremos de P, a razão entre as grandezas terá que ser

A barra do metro padrão já não é mais considerada a melhor forma de padronização do comprimento, que hoje é feita indiretamente pela velocidade da luz e da velocidade.

$$\frac{C}{P} = 4{,}5,$$

o que é equivalente a dizer

$$C = 4{,}5 \cdot P,$$

e como a grandeza comprimento da barra de metro padrão é assumida como *um metro* (1 m),

$$C = 4{,}5 \cdot 1\,\mathrm{m} = 4{,}5\,\mathrm{m}.$$

Ou seja, medir, é observar em que proporção o padrão se repete em nossa medida.

Como nós já possuímos um Sistema Internacional de Grandezas, foram definidas para cada uma destas grandezas uma unidade de padrão internacional, determinando assim um Sistema Internacional de Unidades, ou SI. As informações sobre o SI complementam as informações prestadas na Tabela 2.1.

Assim como temos as unidades de medida para as grandezas do sistema de base, também teremos unidades de medida para as grandezas derivadas. Se retomarmos o exemplo da seção 2.1 da velocidade, e tenhamos medido $d = 150\,\mathrm{m}$ e $t = 5\,\mathrm{s}$, para a velocidade, teremos

$$v = \frac{d}{t} = \frac{150\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{s}} = \frac{30\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} = 30\,\mathrm{m/s} = 30\,\mathrm{ms}^{-1}. \tag{2.1}$$

Ou seja, as unidades derivadas serão expressas por meio das unidades de base.

Tabela 2.1: Resumo do Sistema Internacional de Grandezas e do correspondente Sistema Internacional de Unidades (SI).

GRANDEZA DE BASE	SÍMBOLO DA DIMENSÃO	UNIDADE DO SI - SÍMBOLO
comprimento	L	metro - m
massa	M	kilograma - kg
tempo	T	segundo - s
corrente elétrica	I	ampere - A
temperatura termodinâmica	Θ	kelvin - K
quantidade de substância	N	mol - mol
intensidade luminosa	J	candela - cd

A Equação 2.1 mostra diversas formas de escrever a mesma grandeza e com as mesmas unidades, sendo as mais encontradas da forma $30\,\mathrm{m/s}$ e $30\,\mathrm{ms^{-1}}$, e a mais usual, de longe, é $30\,\mathrm{m/s}$, que se lê "trinta metros por segundo", ou seja, a cada segundo, move-se trinta metros.

2.3 Incerteza na Medição

2.4 Notação Científica

Quando se trata da natureza e de nossas limitações ao escolher padrões de medida, confronta-se imediatamente com a grande extensão do universo, indo do atômico ao astronômico, e percebe-se que os números poderão ir além das unidade, centenas, ou décimos e centésimos. A Tabela 2.2 exemplifica alguns destes números extremos. Nota-se logo que a escrita destes números é difícil, e por isso adota-se a notação científica como padrão de escrita de números.

Notação científica é a escrita de um número qualquer x na forma

$$x = m \cdot 10^p,$$

sendo a mantissa m tal que

$$1 \leq m < 10$$

e a potência p é um inteiro tal que a igualdade seja verdadeira, cumprida a restrição da mantissa.

Note que se a potência p é inteira, obtêm-se x a partir de m apenas por multiplicação de potência de base 10, o que equivalerá na prática ao deslocamento dos algarismos ao longo das casas para se converter de um para o outro. Os números

$$x_1 = m_1 \cdot 10^{p_1} = 0{,}91 \cdot 10^{-30},$$

$$x_2 = m_2 \cdot 10^{p_2} = 9{,}1 \cdot 10^{-31}, \text{e}$$

$$x_3 = m_3 \cdot 10^{p_3} = 91 \cdot 10^{-32},$$

são representações para o primeiro número da Tabela 2.2 com valores sucessivos de p. Eles são todos iguais, ou seja $x_1 = x_2 = x_3$, porém, apenas m_2 respeita

$$1 \leq m_2 < 10,$$

e, portanto, é o único que pode servir como mantissa para a notação científica do número apresentado, e é esta representação que está na tabela, seguido pela potência $p_2 = -31$ correspondente. Este exemplo ilustra que os valores da mantissa e da potência são únicos se for respeitada a restrição para a mantissa.

2.5 Ordem de Grandeza

Muitas vezes empresários, políticos, cientístas ou médicos, não estão interessados em saber exatamente a medida de uma determinada grandeza. Para estipular se uma determinada obra entrará ou não nos planos de um governo, muitas vezes nem é necessário saber o preço exato da empreitada, mas pela sua

Tabela 2.2: Aplicação de notação científica, ordem de grandeza e múltiplos e submúltiplos.

GRANDEZA	ESCRITA CONVENCIONAL	NOTAÇÃO CIENTÍFICA	ORDEM DE GRANDEZA	MÚLTIPLO MAIS PRÓXIMO
massa do elétron	0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 91 kg	$9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg	10^{-30}	-
raio atômico do hidrogênio	0,000000000000000053 m	$5{,}3 \cdot 10^{-17}$ m	10^{-16}	53 pm
velocidade da luz	299 792 458 m/s	$\approx 3{,}00 \cdot 10^{8}$ m/s	10^{8}	300 Mm/s
energia radiada pelo Sol	174 000 000 000 000 000 W	$1{,}74 \cdot 10^{17}$ W	10^{17}	174 PW

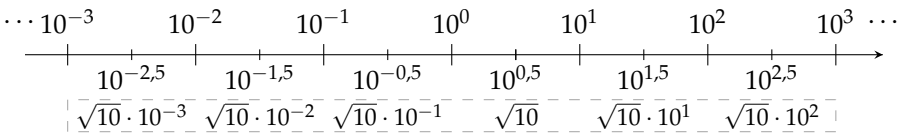



Figura 2.1: Linearização de valores com crescimento exponencial.

grandiosidade, ou pequenez, é possível incluí-la ou descartá-la imediatamente do programa proposto. Isso é possível graças a visão de mundo de quem analisa a questão, e uma boa visão de mundo é seguida de um bom senso capaz de fazer estimativas realistas. A melhor forma organizada de se fazer as estimativas é através da utilização de *ordens de grandeza*.

> Ordem de grandeza é a potência de 10 mais próxima de uma determinada medida.

Na prática, como estamos observando de potência em potência, parece estarmos considerando que de uma potência a sua consecutiva haverá sempre a mesma distância. Por exemplo, é como se de 10^2 até 10^3, fosse a mesmo que de 10^3 para 10^4, porém, no primeiro caso a diferença é de 900 $(1\,000 - 100)$

e no segundo a diferença é de 9 000 (10 000 − 1 000). Ao querer observar gradação linear, temos que olharmos apenas para os expoentes. A Figura 2.1 mostra a disposição das potências como se estivessemos observando a gradação desta forma. Essa figura apresenta uma linearização de uma sequência que na verdade está crescendo exponencialmente.

A função capaz de linearizar uma sequência exponencial é a logarítmica, que é estudada em matemática no ensino médio.

Avaliar a ordem de grandeza fica mais fácil se o valor em estudo estiver escrito em notação científica, pois já teremos uma potência de base 10 próxima ao número, nos restando apenas observar a mantissa. Já para conseguirmos perceber entre qual a potência de 10 que mais se aproxima do valor que x que estivermos estudando, devemos observar quais são os valores que se encontram exatamente entre cada potência. Estes valores são exibidos na Figura 2.1. Entre 10^1 e 10^2, por exemplo, encontramos $10^{1,5} = 10^{0,5} \cdot 10^1 = \sqrt{10} \cdot 10^1$, e entre 10^2 e 10^3 temos $10^{2,5} = 10^{0,5} \cdot 10^2 = \sqrt{10} \cdot 10^2$, ou seja, os valores que estarão mais próximas de 10^2 serão aqueles entre $\sqrt{10} \cdot 10^1$ e $\sqrt{10} \cdot 10^2$. Veja que um número escrita em notação científica e com mantissa maior que $\sqrt{10}$, acabará mais próximo da próxima potência. O valor $\sqrt{10}$ serve, então, como um divisor de águas entre as ordens de grandeza.

Note que nada falamos caso $m = \sqrt{10}$ já que estudar ordem de grandeza tratá de estimativas, e falar em valores exatos é preciosismo. Caso sua estimativa se aproxime demasiadamente de $\sqrt{10}$ deve-se verificar uma possível sobre-estimativa ou subestimativa e decidir por uma das potências da qual o número se aproxima.

Regra prática: Se x é escrito em notação científica como

$$x = m \cdot 10^p$$

a ordem de grandeza de x, que chamaremos OG_x será

$$OG_x = \begin{cases} p, & \text{se } m < \sqrt{10}, \text{ ou;} \\ p+1, & \text{se } m > \sqrt{10}. \end{cases}$$

10^p $\sqrt{10} \cdot 10^p$ 10^{p+1}

$x = m \cdot 10^p$ A

$OG_x = 10^p$ B

C $OG_x = 10^{p+1}$

Figura 2.2: Intervalos e valores para ordem de grandeza e notação científica.

A Figura 2.2 ilustra os intervalos expostos na regra prática. Enquanto que o intervalo A engloba todos os possíveis valores para x caso o mesmo tenha potência decimal de ordem p em sua escrita em notação científica, o intervalo B engloba a região de A onde sua ordem de grandeza será o próprio 10^p, e o intervalo C a região onde ela será 10^{p+1}.

Como exemplos da aplicação da regra prática, tomemos alguns dos números expostos na Tabela 2.2. A massa do elétron é escrita em notação científica como $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, ou seja, a

mantissa é 9,1 $> \sqrt{10}$, e logo, a ordem de grandeza será mais próxima do próximo expoente, $10^{-31+1} = 10^{-30}$. Já a energia irradiada pelo Sol para a Terra é escrita como $1{,}74 \cdot 10^{17}$ W, cuja mantissa $1{,}74 < \sqrt{10}$, o que significa que o número é mais próximo da potência com a qual a notação científica é escrita, que é o próprio 10^{17}.

2.6 Múltiplos e Submúltiplos

Já estamos familiarizados com múltiplos de unidades, como o kilometro que é mil vezes o metro, ou na mesma lógica, o kilograma que é mil vezes o grama. Também estamos familiarizados com submúltiplos, talvez não por este nome, mas o milimetro é um milésimo do metro e é seu submúltiplo, bem como o miligrama, que é um milésimo do grama, é submúltiplo do grama. O *sistema métrico*, que tornou-se a convenção de medidas internacional, adota como múltiplos e submúltiplos potências decimais.

Um múltiplo de uma unidade é maior que a unidade, ou seja, será a unidade multiplicada por um número maior que um, e o submúltiplo é menor, ou seja, é a unidade multiplicada por um número entre zero e um.

Nem todas as unidades tem múltiplos ou submúltiplos decimais, como é o caso do pé e da jarda. O pé é um submúltiplo que vale um terço da jarda.

Fica claro quando se utiliza múltiplos ou submúltiplos métricos pela utilização de prefixos padronizados, como o "kilo" e o "mili" dos exemplos anteriores. A Tabela 2.3 resume os múltiplos e submúltiplos do SI, seus prefixos e o símbolo que representa este prefixo na unidade e a Tabela 2.2 mostra a escrita dos números dados utilizando os múltiplos ou submúltiplos mais próximos.

2.7 Conversão de Unidades

Conversão de unidades não passa de aplicação de proporção. Vimos, porém, que as grandezas podem ser de base ou derivadas, o que pode parecer complicar as conversões de unidades, já haverá várias unidades na escrita das unidades de grandezas derivadas. Dividiremos o procedimento para conversão de unidades em dois, aquele que a conversão é direta, como veremos, e aquele que precirá de alguns passos até que se chegue ao passo em que a conversão é direta.

Tabela 2.3: Múltiplos e Submúltiplos do SI.

MÚLTIPLOS			SUBMÚLTIPLOS		
FATOR	PREFIXO	SÍMBOLO	FATOR	PREFIXO	SÍMBOLO
10^1	deca	da	10^{-1}	deci	d
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	kilo	k	10^{-3}	mili	m
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zeta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y

2.7.1 Conversão de Unidade de Grandeza de Base ou Unidades com Fator de Conversão Conhecido

Fator de conversão é a razão entre duas unidades de medida de grandezas de mesma natureza.

Quando estivermos trabalhando com unidades de uma grandeza de base, não há alternativa para que se converta unidades, é necessário conhecer o fator de conversão, ou equivalentemente, conhecer ao menos uma relação entre as unidades.

Tomemos como exemplo simples o comprimento, que é uma grandeza do Sistema Internacional de Grandezas, e as unidades: metro (m), kilometro (km), pé (ft) e polegada (in). Uma relação bem conhecida entre metro e kilometro é

Usamos a expressão "um kilometro são mil metros", mas poderiamos ter usado "o metro é um milésimo de kilometro", não há diferença.

$$1\,\text{km} = 1\,000\,\text{m}, \tag{2.2}$$

o que por simples manipulação algébrica resulta no fator de conversão

$$\frac{\text{km}}{\text{m}} = 1\,000. \tag{2.3}$$

A diferença entre as expressões acima é meramente formal, mas a Equação 2.2 explicita a relação entre o kilometro e o

metro, enquanto que a 2.3 expressa o fator de conversão entre estas unidades.

Uma relação não tão conhecida nos países em que o sistema métrico foi adotado é aquela que expõe a relação entre pés e polegadas dada por

$$12\,\text{in} = 1\,\text{ft},$$

que resulta no fator de conversão

$$\frac{\text{in}}{\text{ft}} = \frac{1}{12}.$$

Veja que ambas as expressões que avaliamos, a que relaciona metro e kilometro e a que relaciona pé e polegada, resultam em relações "bem comportadas", com uma relação envolvendo números inteiros. A primeira relação, entre metro e quilômetro, apresenta um inteiro que é potência decimal (10^3), já que a diferença entre as unidades esta de acordo com o sistema métrico. A segunda é expressa com a dúzia. Veja também que arbitrariamente decidimos expressar o fator de conversão entre pés e polegadas como in/ft, o que resultou em um fator racional e menor do que um. Caso estivessemos escolhido expressar este fator como ft/in, teriamos o inteiro $12 = (1/12)^{-1}$, da mesma forma que se tivessemos adotado m/km, obteriamos um racional $\frac{1}{1\,000} = 1000^{-1}$. Qualquer que seja o fator de conversão que nos seja fornecido, sempre poderemos obter a relação inversa invertendo o fator. O fator que utilizaremos dependerá exclusivamente da conversão que desejamos fazer.

Note que a escolha do fator de conversão entre os múltiplos é arbitrária, mas ao escolher a do sistema métrico, adota-se um padrão semelhante a nossa escrita numérica que é decimal, já outras escolhas certamente não terão qualquer implicação prática.

Saber que um pé é uma dúzia de polegadas ou que um kilometro são mil metros nos possibilitou encontrar o fator de conversão. Nem todas as relações entre unidades da mesma grandeza, porém, gozarão de relações tão simples, como por exemplo a relação entre o metro e o pé. Nesses casos a relação em geral não é intuitíva e é meramente computacional, o que faz com que nos apoiemos quase sempre no fator de conversão, que normalmente é registrado em tabelas de conversão, e neste caso é

$$\frac{\text{ft}}{\text{m}} = 0{,}3048.$$

Raramente alguém dirá que um pé são três mil e quarenta e oito décimos de milésimos do metro, mesmo que ele saiba esta relação de cabeça.

Assim como o fator de conversão entre pés e metros é tabelado, unidades derivadas também podem ser convertidas a partir de fatores de potência dados. O fator de conversão

entre metro por segundo e kilometro por hora, por exemplo, é dado por

$$\frac{\mathrm{m/s}}{\mathrm{km/h}} = 3{,}6, \tag{2.4}$$

ou seja,

$$1\,\mathrm{m/s} = 3{,}6\,\mathrm{km/h}. \tag{2.5}$$

Na seção 2.7.2 veremos como chegar a fatores de conversão ou a relações entre unidades derivadas semelhantes as das Equações 2.4 e 2.5.

Agora que já entendemos que há uma relação entre as unidades e sabemos o que é o fator de conversão, como pode ser feita a conversão entre as unidades?

Explicaremos as origens de cada método para que se entenda os mecânismos de conversão de unidades. Os métodos apresentados não esgotarão todas as formas ou possibilidades de conversão, que podem ser, inclusive, desenvolvidas pelo estudante a seu agrado.

Para conhecermos alguns métodos, vamos aplicá-los aos seguintes exemplos:

Ex. 1 Converter 2,5 km para metros.

Ex. 2 Converter 35 m para kilometros.

Ex. 3 Converter 80 m para pés.

Ex. 4 Converter 9,7 ft para metros.

Ex. 5 Converter 20 m/s em kilometros por hora, dado o fator de conversão $\frac{\mathrm{m/s}}{\mathrm{km/h}} = 3{,}6$.

Ex. 6 Converter 45 km/h em metros por segundo, dado o fator de conversão $\frac{\mathrm{m/s}}{\mathrm{km/h}} = 3{,}6$.

Conversão por Proporção

Se uma medida crescer em uma unidade, ela crescerá proporcionalmente na outra.

Ex. 1 Se 1 km são 1 000 m, então, 2,5 km será x, que resultará na proporção

$$\frac{1\,\mathrm{km}}{2{,}5\,\mathrm{km}} = \frac{1\,000\,\mathrm{m}}{x},$$

que se desenvolve em

$$x \cdot 1\,\mathrm{km} = 1\,000\,\mathrm{m} \cdot 2{,}5\,\mathrm{km},$$

e, por fim,

$$x = \frac{1\,000\,\mathrm{m} \cdot 2{,}5\,\cancel{\mathrm{km}}}{1\,\cancel{\mathrm{km}}} = 2\,500\,\mathrm{m}.$$

Ou seja, 2,5 km são 2 500 m.

Ex. 2 Se 1 000 m é 1 km, então, 35 m será x, que resultará na proporção

$$\frac{1\,000\,\text{m}}{35\,\text{m}} = \frac{1\,\text{km}}{x},$$

que se desenvolve em

$$x \cdot 1\,000\,\text{m} = 1\,\text{km} \cdot 35\,\text{m},$$

e, por fim,

$$x = \frac{1\,\text{km} \cdot 35\,\cancel{\text{m}}}{1\,000\,\cancel{\text{m}}} = 0{,}035\,\text{km}.$$

Ou seja, 35 m são 0,035 km.

Ex. 3 Na proporção teremos que confiar na relação, e por isso vamos expressar o fator de conversão como uma relação, ou seja

$$1\,\text{ft} = 0{,}3048\,\text{m}.$$

Podemos então seguir como nos exemplos anteriores, já que se 0,3048 m é 1 ft, então, 80 m será x, que resultará na proporção

$$\frac{0{,}3048\,\text{m}}{80\,\text{m}} = \frac{1\,\text{ft}}{x},$$

que se desenvolve em

$$0{,}3048\,\text{m} \cdot x = 1\,\text{ft} \cdot 80\,\text{m}$$

e, por fim,

$$x = \frac{1\,\text{ft} \cdot 80\,\cancel{\text{m}}}{0{,}3048\,\cancel{\text{m}}} \approx 262{,}5\,\text{ft}.$$

Ou seja, 80 m são aproximadamente 262,5 ft.

Ex. 4 Já utilizando a relação do exemplo anterior, se 1 ft é 0,3048 m, então, 9,7 ft será x, que resultará na proporção

$$\frac{1\,\text{ft}}{9{,}7\,\text{ft}} = \frac{0{,}3048\,\text{m}}{x},$$

que se desenvolve em

$$1\,\text{ft} \cdot x = 0{,}3048\,\text{m} \cdot 9{,}7\,\text{ft}$$

e, por fim,

$$x = \frac{0{,}3048\,\text{m} \cdot 9{,}7\,\cancel{\text{ft}}}{1\,\cancel{\text{ft}}} \approx 2{,}96\,\text{m}.$$

Ou seja, 9,7 ft são aproximadamente 2,96 m.

Ex. 5 Já obtivemos na Equação 2.5 a relação resultante do fator de conversão de metro por segundo para kilometro por hora, e se 1 m/s é 3,6 km/h, então, 20 m/s será x, que resultará na proporção

$$\frac{1\,\mathrm{m/s}}{20\,\mathrm{m/s}} = \frac{3{,}6\,\mathrm{km/h}}{x},$$

que se desenvolve em

$$1\,\mathrm{m/s} \cdot x = 3{,}6\,\mathrm{km/h} \cdot 20\,\mathrm{m/s}$$

e, por fim,

$$x = \frac{3{,}6\,\mathrm{km/h} \cdot 20\,\cancel{\mathrm{m/s}}}{1\,\cancel{\mathrm{m/s}}} = 72\,\mathrm{km/h}.$$

Ou seja, 20 m/s são 72 km/h.

Ex. 6 Utilizando a mesma relação do exemplo anterior, se 3,6 km/h é 1 m/s, então, 45 km/h será x, que resultará na proporção

$$\frac{3{,}6\,\mathrm{km/h}}{45\,\mathrm{km/h}} = \frac{1\,\mathrm{m/s}}{x},$$

que se desenvolve em

$$3{,}6\,\mathrm{km/h} \cdot x = 1\,\mathrm{m/s} \cdot 45\,\mathrm{km/h}$$

e, por fim,

$$x = \frac{1\,\mathrm{m/s} \cdot 45\,\cancel{\mathrm{km/h}}}{3{,}6\,\cancel{\mathrm{km/h}}} = 12{,}5\,\mathrm{m/s}.$$

Ou seja, 45 km/h são 12,5 m/s.

Conversão pela Aplicação Direta do Fator de Conversão

Vamos utilizar as unidades hipotéticas a e b. Se x a for igual a y b, então o fator de conversão $fc_{\mathrm{a}\to\mathrm{b}}$ será

$$fc_{\mathrm{a}\to\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{y}{x}.$$

Chamaremos $f_{\mathrm{a}\to\mathrm{b}}$ de fator de conversão de a para b, necessariamente nesta ordem.

Observe que se fossemos aplicar o método passado teriamos x a são y b, então, z a será w, e a proporção

$$\frac{x\,\mathrm{a}}{z\,\mathrm{a}} = \frac{y\,\mathrm{b}}{w}$$

que se desenvolve em

$$x\,\mathrm{a} \cdot w = y\,\mathrm{b} \cdot z\,\mathrm{a},$$

e, por fim,

$$w = \frac{y\,\mathrm{b} \cdot z\,\cancel{\mathrm{a}}}{x\,\cancel{\mathrm{a}}} = \frac{y}{x} \cdot z\,\mathrm{b}.$$

Ou seja, obtivemos o valor w na unidade b pela multiplicação de z, que era o respectivo valor na unidade a, pelo fator de conversão $fc_{\mathrm{a}\to\mathrm{b}}$, que é o fator de conversão de a para b.

Regra prática: Se o fator de conversão de a para b é dado por

$$fc_{\mathrm{a}\to\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$$

uma medida x na unidade a corresponderá a uma medida y na unidade b, sendo a relação entre estas medidas dada por

$$y = fc_{\mathrm{a}\to\mathrm{b}} \cdot x.$$

Veja que pela definição acima

$$fc_{\mathrm{b}\to\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} = (fc_{\mathrm{a}\to\mathrm{b}})^{-1}.$$

Ex. 1 Utilizaremos $fc_{\mathrm{km}\to\mathrm{m}} = \mathrm{km}/\mathrm{m} = 1\,000$. A aplicação da regra prática levará a

$$(\text{medida em metros}) = fc_{\mathrm{km}\to\mathrm{m}} \cdot (\text{medida em kilometros}).$$

Substituindo os valores da conversão resulta em

$$(\text{medida em metros}) = 1\,000 \cdot 2{,}5 = 2\,500.$$

Ou seja, 2,5 km são 2 500 m.

Ex. 2 Utilizaremos $fc_{\mathrm{m}\to\mathrm{km}} = (fc_{\mathrm{km}\to\mathrm{m}})^{-1} = \mathrm{m}/\mathrm{km} = 1/1\,000$. A aplicação da regra prática levará a

$$(\text{medida em kilometros}) = fc_{\mathrm{m}\to\mathrm{km}} \cdot (\text{medida em metros}).$$

Substituindo os valores da conversão resulta em

$$(\text{medida em kilometros}) = \frac{1}{1\,000} \cdot 35 = 0{,}035.$$

Ou seja, 35 m são 0,035 km.

Ex. 3 Utilizaremos $fc_{\text{m}\to\text{ft}} = (fc_{\text{ft}\to\text{m}})^{-1} = \text{m}/\text{ft} = 1/0{,}3048$. A aplicação da regra prática levará a

$$(\text{medida em pés}) = fc_{\text{m}\to\text{ft}} \cdot (\text{medida em metros}).$$

Substituindo os valores da conversão resulta em

$$(\text{medida em pés}) = \frac{1}{0{,}3048} \cdot 80 \approx 262{,}5.$$

Ou seja, 80 m são aproximadamente 262,5 ft.

Ex. 4 Utilizaremos $fc_{\text{ft}\to\text{m}} = \text{ft}/\text{m} = 0{,}3048$. A aplicação da regra prática levará a

$$(\text{medida em metros}) = fc_{\text{ft}\to\text{m}} \cdot (\text{medida em pés}).$$

Substituindo os valores da conversão resulta em

$$(\text{medida em metros}) = 0{,}3048 \cdot 9{,}7 \approx 2{,}96.$$

Ou seja, 9,7 ft são aproximadamente 2,96 ft.

Ex. 5 Utilizaremos $fc_{\text{m/s}\to\text{km/h}} = \frac{\text{m/s}}{\text{km/h}} = 3{,}6$. A aplicação da regra prática levará a

$$\begin{pmatrix} \text{medida em} \\ \text{kilometro} \\ \text{por hora} \end{pmatrix} = fc_{\text{m/s}\to\text{km/h}} \cdot \begin{pmatrix} \text{medida em} \\ \text{metro por} \\ \text{segundo} \end{pmatrix}.$$

Substituindo os valores da conversão resulta em

$$\begin{pmatrix} \text{medida em} \\ \text{kilometro por hora} \end{pmatrix} = 3{,}6 \cdot 20 = 72.$$

Ou seja, 20 m/s são 72 km/h.

Ex. 6 Utilizaremos $fc_{\text{km/h}\to\text{m/s}} = (fc_{\text{km/h}\to\text{m/s}})^{-1} = \frac{\text{km/h}}{\text{m/s}} = 1/3{,}6$. A aplicação da regra prática levará a

$$\begin{pmatrix} \text{medida em} \\ \text{metro por} \\ \text{segundo} \end{pmatrix} = fc_{\text{km/h}\to\text{m/s}} \cdot \begin{pmatrix} \text{medida em} \\ \text{kilometro} \\ \text{por hora} \end{pmatrix}.$$

Substituindo os valores da conversão resulta em

$$\begin{pmatrix} \text{medida em metro} \\ \text{por segundo} \end{pmatrix} = \frac{1}{3{,}6} \cdot 45 = 12{,}5.$$

Ou seja, 45 km/h são 12,5 m/s.

Este método é amplamente utilizado em computação com cálculo automático das conversões, já que uma máquina não sabe o que é uma unidade, e ela tem que ser previamente programada para executar apenas certas operações, o que aproveita o fato do resultado final deste método ser simplesmente uma multiplicação entre o fator de conversão correto e o valor da medida na unidade a ser convertida. Apesar disto, este método não deixa as informações sobre as unidades explícitas na cálculo, o que dificultará uma eventual conferência dos resultados obtidos.

Conversão por Substituição

Se o método anterior confiava apenas no conhecimento do fator de conversão, este método utilizará apenas a relação entre as unidades.

Ex. 1 Como $1\,\text{km} = 1\,000\,\text{m}$, se substituirmos este valor para $1\,\text{km}$ no segundo membro de

$$2{,}5\,\text{km} = 2{,}5 \cdot 1\,\text{km},$$

obteremos

$$2{,}5\,\text{km} = 2{,}5 \cdot 1\,000\,\text{m} = 2\,500\,\text{m}.$$

Ou seja, 2,5 km são 2 500 m.

Ex. 2 Como $1\,\text{m} = 1/1\,000\,\text{km}$, se substituirmos este valor para $1\,\text{m}$ no segundo membro de

$$35\,\text{m} = 35 \cdot 1\,\text{m},$$

obteremos

$$35\,\text{m} = 35 \cdot \frac{1}{1\,000}\,\text{km} = 0{,}035\,\text{km}.$$

Ou seja, 35 m são 0,035 km.

Ex. 3 Como $0{,}3048\,\text{m} = 1\,\text{ft}$, se substituirmos este valor para $0{,}3048\,\text{m}$ no segundo membro de

$$80\,\text{m} = \frac{80}{0{,}3048} \cdot 0{,}3048\,\text{m},$$

obteremos

$$80\,\text{m} = \frac{80}{0{,}3048} \cdot 1\,\text{ft} \approx 262{,}5\,\text{ft}.$$

Ou seja, 80 m são aproximadamente 262,5 ft.

Poderiamos também utilizar $1\,\text{m} = 1/0{,}3048\,\text{ft}$ para simplificar a escrita do segundo membro da equação. O resultado final teria que ser o mesmo.

Ex. 4 Como $1\,\text{ft} = 0{,}3048\,\text{m}$, se substituirmos este valor para $1\,\text{ft}$ no segundo membro de

$$9{,}7\,\text{ft} = 9{,}7 \cdot 1\,\text{ft},$$

obteremos

$$9{,}7\,\text{ft} = 9{,}7 \cdot 0{,}3048\,\text{m} \approx 2{,}96\,\text{m}.$$

Ou seja, $9{,}7\,\text{ft}$ são aproximadamente $2{,}96\,\text{m}$.

Ex. 5 Como $1\,\text{m/s} = 3{,}6\,\text{km/h}$, se substituirmos este valor para $1\,\text{m/s}$ no segundo membro de

$$20\,\text{m/s} = 20 \cdot 1\,\text{m/s},$$

obteremos

$$20\,\text{m/s} = 20 \cdot 3{,}6\,\text{km/h} = 72\,\text{km/h}.$$

Ou seja, $20\,\text{m/s}$ são $72\,\text{km/h}$.

Novamente, poderiamos ter escrito $1\,\text{km/h} = 1/3{,}6\,\text{m/s}$, mas priorizamos as relações sem frações em detrimento de forçar seu aparecimento na expressão do segundo membro.

Ex. 6 Como $1\,\text{m/s} = 3{,}6\,\text{km/h}$, se substituirmos este valor para $3{,}6\,\text{km/h}$ no segundo membro de

$$45\,\text{km/h} = \frac{45}{3{,}6} \cdot 3{,}6\,\text{km/h},$$

obteremos

$$45\,\text{km/h} = \frac{45}{3{,}6} \cdot 1\,\text{m/s} = 12{,}5\,\text{m/s}.$$

Ou seja, $45\,\text{km/h}$ são $12{,}5\,\text{m/s}$.

Conversão por uma Razão Unitária

Escolheremos a razão unitária que tenha no denominador a unidade na qual o número já está escrito para que possamos dividí-la por ela mesma, como vemos no desenvolvimento da expressão deste exemplo.

Este método consiste em confiar no elemento neutro da multiplicação, o 1, e procurar uma razão unitária entre as unidades envolvidades na conversão de modo a reescrever a medida multiplicada por esta razão que vale 1. Desta forma, este método mistura um pouco da informação do fator de conversão (já que trata-se de uma razão), e da substituição, já que substituiremos o 1 pela razão necessária para efetuar a conversão. O procedimento para encontrar esta razão unitária é simples, basta iniciar pela expressão que determina a relação entre as unidades e forçar o surgimento do um em um dos membros desta relação.

Ex. 1 Da relação 1 km = 1 000 m, podemos obter uma razão unitária dividindo ambos os membros por 1 km, que resulta em

$$1 = \frac{1\,000\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{km}}.$$

Sustituindo em

$$2{,}5\,\mathrm{km} = 2{,}5\,\mathrm{km} \cdot 1 = 2{,}5\,\cancel{\mathrm{km}} \cdot \frac{1{,}000\,\mathrm{m}}{1\,\cancel{\mathrm{km}}} = 2\,500\,\mathrm{m}.$$

Ou seja, 2,5 km são 2 500 m.

Ex. 2 Da relação 1 000 m = 1 km, podemos obter uma razão unitária dividindo ambos os membros por 1 000 m, que resulta em

$$1 = \frac{1\,\mathrm{km}}{1\,000\,\mathrm{m}}.$$

Sustituindo em

$$35\,\mathrm{m} = 35\,\mathrm{m} \cdot 1 = 35\,\cancel{\mathrm{m}} \cdot \frac{1\,\mathrm{km}}{1\,000\,\cancel{\mathrm{m}}} = 0{,}035\,\mathrm{km}.$$

Ou seja, 35 m são 0,035 km.

Ex. 3 Da relação 0,3048 m = 1 ft, podemos obter uma razão unitária dividindo ambos os membros por 0,3048 m, que resulta em

$$1 = \frac{1\,\mathrm{ft}}{0{,}3048\,\mathrm{m}}.$$

Sustituindo em

$$80\,\mathrm{m} = 80\,\mathrm{m} \cdot 1 = 80\,\cancel{\mathrm{m}} \cdot \frac{1\,\mathrm{ft}}{0{,}3048\,\cancel{\mathrm{m}}} \approx 262{,}5\,\mathrm{ft}.$$

Ou seja, 80 m são aproximadamente 262,5 ft.

Ex. 4 Da relação 1 ft = 0,3048 m, podemos obter uma razão unitária dividindo ambos os membros por 1 ft, que resulta em

$$1 = \frac{0{,}3048\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{ft}}.$$

Sustituindo em

$$9{,}7\,\mathrm{ft} = 9{,}7\,\mathrm{ft} \cdot 1 = 9{,}7\,\cancel{\mathrm{ft}} \cdot \frac{0{,}3048\,\mathrm{m}}{1\,\cancel{\mathrm{ft}}} \approx 2{,}96\,\mathrm{m}.$$

Ou seja, 9,7 ft são aproximadamente 2,96 m.

Ex. 5 Da relação $1\,\mathrm{m/s} = 3{,}6\,\mathrm{km/h}$, podemos obter uma razão unitária dividindo ambos os membros por $1\,\mathrm{m/s}$, que resulta em

$$1 = \frac{3{,}6\,\mathrm{km/h}}{1\,\mathrm{m/s}}.$$

Sustituindo em

$$20\,\mathrm{m/s} = 20\,\mathrm{m/s} \cdot 1 = 20\,\cancel{\mathrm{m/s}} \cdot \frac{3{,}6\,\mathrm{km/h}}{1\,\cancel{\mathrm{m/s}}} = 72\,\mathrm{km/h}.$$

Ou seja, $20\,\mathrm{m/s}$ são $72\,\mathrm{km/h}$.

Ex. 6 Da relação $3{,}6\,\mathrm{km/h} = 1\,\mathrm{m/s}$, podemos obter uma razão unitária dividindo ambos os membros por $3{,}6\,\mathrm{km/h}$, que resulta em

$$1 = \frac{1\,\mathrm{m/s}}{3{,}6\,\mathrm{km/h}}.$$

Sustituindo em

$$45\,\mathrm{km/h} = 45\,\mathrm{km/h} \cdot 1 = 45\,\cancel{\mathrm{km/h}} \cdot \frac{1\,\mathrm{m/s}}{3{,}6\,\cancel{\mathrm{km/h}}} = 12{,}5\,\mathrm{m/s}.$$

Ou seja, $45\,\mathrm{km/h}$ são $12{,}5\,\mathrm{m/s}$.

Esta razão unitária poderia ser chamada também de *taxa de conversão*, já que determina a que taxa o valor de determinada medida varia com o outro.

Regra prática: Se a taxa de conversão de a para b é dado por

$$tc_{\mathrm{a}\to\mathrm{b}} = \frac{B\,\mathrm{b}}{A\,\mathrm{a}},$$

onde

$$A\,\mathrm{a} = B\,\mathrm{b},$$

é uma relação entre estas unidades, então uma medida x na unidade a corresponderá a uma medida y na unidade b, sendo a relação entre estas medidas dada por

$$y = tc_{\mathrm{a}\to\mathrm{b}} \cdot x.$$

Observe que utilizamos, por exemplo, para a conversão de metro para kilometro a taxa

$$tc_{\mathrm{m}\to\mathrm{km}} = \frac{1\,\mathrm{km}}{1\,000\,\mathrm{m}}.$$

2.7.2 Conversão de Unidades Derivadas

O procedimento para conversão de unidades derivadas segue a estratégia de dividir para conquistar. Devemos destrinchar nossa unidade que deriva em várias unidades de base, ou varias outras unidades derivadas menores com fator de conversão ou alguma relação conhecida, converter estas partes menores e em seguida analisar como fica a conversão da unidade de forma global.

Como nós já sabemos várias formas de converter unidades quando é conhecida alguma informação com respeito a relação entre elas, seja uma equação, um fator de conversão, etc., vamos focar nesta seção como encontrar um desses elementos, a conversão a partir daí dar-se-ia como já foi feito na seção 2.7.1. Em particular vamos focar em conseguir obter uma relação do tipo equação que relacione as duas unidades, o que faremos por meio dos exemplos que se seguem.

Ex. 1 Para encontrar a relação entre m/s e km/h, vamos utilizar o método da substituição duas vezes. Escrevamos

$$1\,\mathrm{m/s} = \frac{1\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}}$$

de modo a explicitar cada unidade de base que compõe esta unidade derivadae substituí-las uma a uma. Como

$$1\,\mathrm{h} = 60\,\mathrm{min} = 60 \cdot 1\,\mathrm{min} = 60 \cdot 60\,\mathrm{s},$$

então, $1\,\mathrm{h} = 3\,600\,\mathrm{s}$, ou $1\,\mathrm{s} = 1/3\,600\,\mathrm{h}$. A relação $1\,\mathrm{m} = 1/1\,000\,\mathrm{km}$, nós já conhecemos. Ao substituir ambas na expressão anterior teremos

$$1\,\mathrm{m/s} = \frac{1\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} = \frac{1/1\,000\,\mathrm{km}}{1/3\,600\,\mathrm{h}} = \frac{3\,600}{1\,000}\,\mathrm{km/h}.$$

Ou seja $1\,\mathrm{m/s} = 3{,}6\,\mathrm{km/h}$.

2.8 Análise Dimensional

A análise dimensional é o estudo das grandezas e expressões tomando por base as grandezas da Tabela 2.1 ou as próprias unidades em que as grandezas serão representadas.

Na seção 2.1 já representamos a dimensão da velocidade como $\dim v = \mathsf{LT}^{-1}$ e sua unidade como vista na seção 2.2 expressaremos como $[v] = \mathrm{m/s}$.

> Se x é uma grandeza $\dim x$ representa a dimensão de x expressa em termos das dimensões de base da Tabela 2.1 e $[x]$ é a unidade na qual ele é expresso.

Alguns valores tem significado físico mas não tem dimensão ou unidades, e chamaremos de *grandeza adimensional*. Muitos coeficientes e razões encontrados na física são adimensionais e como exemplo, podemos citar a razão entre o raio R e o perímetro P de uma circunferência já que

$$\pi = \frac{P}{R},$$

então

$$\dim \pi = \frac{\dim P}{\dim R} = \frac{\mathsf{L}}{\mathsf{L}} = 1.$$

Algumas regras devem ser observadas na análise dimensional.

> Se a, b e c são grandezas, então
>
> *i.* Só é possível somar a e b se $\dim a = \dim b$ e $\dim(a+b) = \dim a = \dim b$;
>
> *ii.* A dimensão do produto $a \cdot b$ é o produto das dimensões, ou seja, $\dim(a \cdot b) = \dim a \cdot \dim b$;
>
> *iii.* A dimensão da razão $\frac{a}{b}$ é a razão das dimensões, ou seja, $\dim\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\dim a}{\dim b}$, e;
>
> *iv.* Se $a = b$, necessariamente $\dim a = \dim b$.

Como exemplo de análise dimensional, vamos considerar a expressão

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}, \tag{2.6}$$

que será demonstrada e analisada minunciosamente em capítulo a ser publicado em distribuição futura desta obra sobre

movimento uniformemente variado. Nela, s e s_0 são chamados de *espaço* e *espaço inicial*, respectivamente, e portanto

$$\dim s = \dim s_0 = \mathsf{L}.$$

O termo v_0 é a *velocidade inicial*, e portanto, como já vimos para velocidade

$$\dim v_0 = \mathsf{LT}^{-1}.$$

O tempo t nós já sabemos que $\dim t = \mathsf{T}$. Por fim, a é a *aceleração*, para a qual

$$\dim a = \mathsf{LT}^{-2}.$$

Veja que pelo item i, todas as parcelas do membro direito da Equação 2.6 terão que ter mesma dimensão em nossa análise. Vejamos se isto é verdade. A primeira parcela é a mais simples já que $\dim s_0 = \mathsf{L}$. Já na segunda, teremos que utilizar a regra ii e teremos

$$\dim(v_0 \cdot t) = \dim v_0 \cdot \dim t = \mathsf{LT}^{-1} \cdot \mathsf{T} = \mathsf{L}.$$

Por fim, para o última parcela, utilizaremos a mesma regra para chegar a

$$\dim(a \cdot t^2) = \dim(a \cdot t \cdot t) = \mathsf{LT}^{-2} \cdot \mathsf{T} \cdot \mathsf{T} = \mathsf{L}.$$

O $1/2$ que múltiplica at^2 na terceira parcela da Equação 2.6 é um coeficiente adimensional e não foi considerado na análise, mas poderia ter sido utilizando $\dim(1/2) = 1$.

Concluímos então que as três parcela tem mesma dimensão L, e portanto estão de acordo com o item i, e logo, a soma destas três parcelas também terá

$$\dim\left(s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}\right) = \mathsf{L}.$$

Em última análise, vemos que o item iv é respeitado, já que o membro esquerdo também tem dimensão $\dim s = \mathsf{L}$.

Proceder a análise dimensional com as unidades levaria a resultados muito semelhantes, já que na prática simplesmente trocariamos as dimensões gerais L e T pelas unidades de comprimento e tempo respectivamente. Se usassemos as unidades do SI, estas unidades seriam m e s e teriamos

$$[s] = \mathrm{m}, \quad [s_0] = \mathrm{m}, \quad [v_0] = \mathrm{m/s}, \quad [t] = \mathrm{s, e}, \quad a = \mathrm{m/s^2},$$

para cada termo, e

$$[v_0 \cdot t] = \text{m/s} \cdot \text{s} = \text{m, e,} \quad [a \cdot t^2] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{s}^2 = \text{m},$$

para as duas últimas parcelas do membro direito da Equação 2.6. Assim se observa a coerência das unidades para toda a expressão.

2.9 Variação de Medidas

Suponha que desejamos realizar um experimento envolvendo temperatura. Objetos que sofrem aquecimento, por exemplo, tendem a dilatar-se. Esta dilatação, porém, não depende da temperatura no início ou no fim do aquecimento, e sim, do quanto mudou a temperatura. Se um objeto metálico é aquecido da temperatura inicial, digamos, $T_{i1} = 20\,°\text{C}$, à uma temperatura final $T_{f2} = 400\,°\text{C}$, o aumento de temperatura é de 380 °C. A obtenção do aumento de temperatura pode ser facilmente calculado ao se efetuar a subtração entre os valores

Os valores das temperaturas em cada instante aparecem secundariamente no modelo matemático encontrado experimentalmente para a dilatação. No entanto, a variação de temperatura que o objeto metálico sofreu é mais evidente neste modelo.

$$T_{f1} - T_{i1}. \tag{2.7}$$

Já se a barra resfria de uma temperatura inicial $T_{i2} = 400\,°\text{C}$ a uma temperatura $T_{f2} = 20\,°\text{C}$, a diminuição da temperatura tem mesmo valor que o exemplo anterior, no caso, 380 °C. Para o modelo matemático, como poderemos diferenciar o aquecimento de 380 °C do resfriamento desta mesma temperatura? Observe que se recorrermos ao mesmo mecanismo usado na Equação 2.7 e efetuarmos a operação $T_{f2} - T_{f1}$, teremos como resultado $-380\,°\text{C}$, um valor negativo.

No fenômeno que escolhemos como exemplo, o sinal da diferença entre as temperaturas final e inicial, nesta ordem, é capaz de diferenciar o aquecimento (positivo) do resfriamento (negativo). A esta diferença em particular (diferença de temperatura), convencionou-se denominar ΔT. Para os modelos matemáticos obtidos para a descrição da dilatação térmica, é certo que se encontre o parâmetro

A letra grega Δ (delta maiúscula) é utilizada pois ela possui a mesma função do "D" no alfabeto latino, inicial de *diferença*.

$$\Delta T = T_f - T_i. \tag{2.8}$$

Como caso geral, devido ao aparecimento frequente de diferenças desta natureza em diversas descrições físicas, a convenção adotada é

Uma variação (ou diferença) de uma variável qualquer x, de um valor inicial x_i a um valor final x_f, é denotada por

$$\Delta x = x_f - x_i. \tag{2.9}$$

Capítulo 3

Introdução à Cinemática

"Talvez não haja, na natureza, nada tão antigo quanto o movimento, sobre o qual os escritos dos filósofos não são poucos nem pequenos [. . .] ."

Galileu Galilei

Sumário

O primeiro tópico no estudo da física é a *cinemática*.

A palavra cinemática tem origem em κίνεμα (quínema), movimento em grego.

CINEMÁTICA
A cinemática é a descrição dos movimentos.

A descrição do movimento não inclui o estudo de suas causas. As causas do movimento são estudadas na *dinâmica*, um tópico a ser coberto nos próximos capítulos.

A cinemática tem dois importantes papéis. O primeiro é permitir a descrição do *movimento em si*. O movimento em si é importante para atletas, pilotos, para o projeto de mecanismos móveis (elevadores, impressoras, tomógrafos...), para o estudo do movimento dos fluídos no corpo (ecocardiograma), navegação, enfim, para qualquer aplicação em que o movimento seja a finalidade. O segundo é para observar *fenômenos secundários através do movimento* que eles causam. Os campos elétricos e magnéticos, por exemplo, não podem ser percebidos por nossos aparelhos sensores, com exceção das ondas eletromagnéticas em uma faixa de frequências limitada. Os movimentos que estes campos geram nos corpos em que atuam, porém, podem ser utilizados para observar estes campos. Tão grande é a gama de fenômenos que entendemos como movimento que [10] argumenta que *tudo é movimento*, e que, portanto, a física é a ciência que estuda o movimento.

A cinemática foi abordada por Galileu em seu último livro, *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, intorno a due nuove scienze*, de 1638. Proibido pela inquisição de publicar, recorreu à Elzevir para imprimir seu livro na Holanda.

A cinemática como é estudada hoje é baseada nos estudos de Galileo Galilei (1564-1642). Apesar das muitas modificações na forma de apresentação feitas ao longo dos anos, boa parte dos resultados obtidos aqui e nos capítulos subsequentes já eram conhecidos desde os seus estudos.

Ao longo deste capítulo serão apresentadas algumas definições com a finalidade de descrever o movimento de uma forma matemática e objetiva.

3.1 Posição

Tudo o que estudaremos se baseia em modelos, que provavelmente evoluirão para modelos matemáticos, como já discutimos nas seções 1.1.1 e 1.1.2. A posição, que é a primeira grandeza física que vamos estudar, nada mais é do que uma forma de localizar corpos por meio da grandeza de comprimento.

> POSIÇÃO
> Posição é a qualidade dos corpos ou eventos que distingue *onde* eles estão ou ocorrem. Possibilita distinguir perto e longe, mais perto, ou mais longe, e localizá-los.

3.1.1 Medição de Posição

Para cumprir a tarefa da cinemática, que é descrever o movimento, é necessário associar as grandezas de *tempo* e *posição*. Se fosse possível saber em todo instante onde o móvel se encontra, ter-se-ia uma descrição completa do movimento. Nesta seção veremos como descrever a posição de um móvel e nas próxima como descrever o tempo. Como a melhor forma de descrever qualquer coisa é matematicamente, buscaremos uma forma matemática de descrever a posição.

Figura 3.1: O sistema geográfico e suas coordenadas θ, ϕ e R, chamadas respectivamente de longitude, latitude e altitude.

Inicialmente temos que fazer medidas no espaço, ou do espaço, ou seja, medir distâncias, e a grandeza que estaremos medindo é o *comprimento*. Tal procedimento é feito pela repetição de um padrão ao longo do comprimento a ser medido. O padrão melhor aceito pela comunidade científica é o que adota o metro, derivado originalmente de uma barra de platina e irídio. Esta barra foi projetada para corresponder à fração de um décimo de milionésimo da distância entre a Linha do Equador e o polo Norte. As imperfeições da forma da Terra, que não é exatamente esférica, causaram um pequeno erro no tamanho da barra padrão. Hoje o padrão de distância é adotado com

Figura 3.2: Ordem de grandeza para a grandeza comprimento.

base na velocidade da luz, como veremos adiante. A Figura 3.2 mostra exemplos de comprimentos e sua distribuição ao longo das ordens de grandeza, e [11] mostra de forma interativa um esquema para grandezas de pequeno comprimento.

A descrição matemática das posições já deve ser familiar para muitos dos leitores: as *coordenadas*.

> COORDENADAS
> Coordenadas são um conjunto de valores, geralmente numéricos, que localiza um ponto no espaço.

Um bom exemplo é o sistema de coordenadas geográficas que utiliza um conjunto de três números, *latitude*, *longitude* e *altitude*, para descrever a posição de móveis com relação a Terra e estão ilustrados na Figura 3.1. A utilização de três números não é por acaso. Costuma-se dizer que cada um dos números corresponde a uma dimensão do espaço. O espaço que precisa de três dimensões para localizar um móvel é chamado *espaço tridimensional* (3D). Nossa percepção do mundo real é uma percepção tridimensional. Ele é dotado de largura, altura e profundidade.

Não por acaso,um de nossos sensores de movimento, localizado no ouvido interno, é composto por três canais, que percebem os deslocamentos giros em torno da largura, altura e profundidade [12].

Um outro sistema de coordenadas é o utilizado em jogos de batalha naval. A Figura 3.3 mostra o esquema de um tabuleiro neste jogo. Observe que são necessários dois valores para localizar uma peça no tabuleiro. No jogo, um dos valores utili-

zados é numérico e o outro alfabético. Qualquer dos pontos do tabuleiro corresponde a um par de valores, um alfabético e um numérico como $A2$ e $B5$, por exemplo. Note que poderíamos trocar os valores alfabéticos por valores numéricos sem qualquer perda, desde que respeitássemos sempre uma ordem de convenção. Teríamos, assim, pares de números ao invés de uma letra e um número. Podemos dizer que o espaço que precisa de dois valores para localizar um móvel e é chamado de *espaço bidimensional* (2D). Os espaços planos são bidimensionais. Em geral, a localização de qualquer ponto em uma superfície (mesmo que seja encurvada), requer apenas dois valores. Um navio, por mover-se em uma superfície (a superfície da água) precisa de apenas duas coordenadas para ser localizado.

Nosso estudo tratará inicialmente apenas de movimentos *unidimensionais* (1D). Aqueles em que apenas um número é o suficiente para localizar o móvel. Um carro limitado a uma estrada, um corredor em uma pista, uma peça no tabuleiro de Banco Imobiliário e um trem movendo-se na ferrovia, são exemplos típicos de movimentos confinados a uma dimensão.

Observe na Figura 3.4(a) um trecho de ferrovia. Sobre os trilhos o trem pode mover-se apenas para frente e para trás sobre a curva (linha) que denominamos s na Figura 3.4(b). Sempre que isso ocorre, o movimento poderá ser descrito como unidimensional. A letra s é a convenção para a variável de posição. Para mostrar como proceder com a descrição deste movimento, algumas definições essenciais na descrição de qualquer movimento e que **sempre** estarão presentes nas descrições cinemáticas da física são apresentadas a seguir.

A primeira destas definições é a de *trajetória*.

Figura 3.3: Exemplo de coordenadas em um jogo de Batalha Naval.

No sistema geográfico de coordenadas, um navio é localizado na superfície do mar apenas com latitude e longitude. A altitude não é necessária, já que é sempre 0 (nível do mar).

Os estudos a nível de ensino médio são focados apenas no estudo unidimensional, com exceção do estudo de lançamentos horizontal e oblíquo, tratados em capítulo futuro desta obra sobre cinemática vetorial, que são bidimensionais. Os estudos de movimentos tridimensionais e de maior complexidade são abordados em alguns cursos superiores.

A convenção é utilizada amplamente na literatura de ensino médio brasileira e deve derivar da palavra *space*, espaço em inglês.

> TRAJETÓRIA
>
> Trajetória é o lugar geométrico composto pelo conjunto de todos os pontos que são posição de um móvel em um determinado estudo.

Se um piloto observa um ponto na extremidade da pá de uma hélice, por exemplo, a trajetória observada é uma circunferência como a apresentada na Figura 3.5. A curva s da Figura 3.4(b) é uma possível trajetória para o movimento do trem.

Outra definição é a de *referencial*.

(a) Trecho de linha de trem.

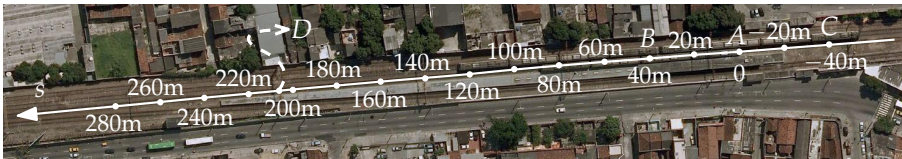
(b) Marcação da trajetória s.

(c) Definição da origem e orientação para determinação de posição.

Figura 3.4: Exemplo de aplicação do método para descrição matemática da posição em um trecho de ferrovia.

> **REFERENCIAL**
> Referencial é de onde se observa o movimento.

Figura 3.5: Trajetória de um ponto sobre a hélice conforme observado de dentro da cabine.

Isso significa que tudo é medido em relação ao referencial (pois ele é a referência).

É fundamental estabelecer de onde se observa o movimento, já que até forma da trajetória é diretamente afetada pelo referencial. Se retomarmos o exemplo da trajetória de um ponto sobre a hélice de um avião, para o piloto, a hélice está sempre no mesmo local, digamos, 3 m a sua frente, e portanto, o ponto sobre a hélice sempre descreve círculos. Não importa se a hélice gira enquanto o avião está parado no solo com o motor ligado, ou se ele está em voo, lá estará a circunferência 3 m à sua frente. Já quando o avião está se deslocando e é observado do solo, a trajetória é uma *helicóide*, como ilustrado na Figura 3.6. Isso acontece porque para um observador no solo, a hélice não só gira como translada (no caso de nossa figura, translada da direita para a esquerda), e esta mudança no referencial ocasiona uma mudança na forma da trajetória.

Figura 3.6: Trajetória de um ponto sobre a hélice como vista por um observado no solo.

Nos movimentos unidimensionais introdutórios que começamos a estudar agora, adotaremos o *referencial orientado*.

> **REFERENCIAL ORIENTADO**
> O referencial orientado possui três características com as quais é possível fazer corresponder a cada posição um número, que será sua coordenada:
>
> 1. Uma trajetória definida, sobre a qual serão medidas as distâncias;
> 2. Uma *origem* sobre a trajetória, que podemos dizer ser onde se localiza a referência e na qual a coordenada é zero ($s = 0$) e todas as outras serão medidas com relação a ela; e
> 3. Um sentido positivo, convencionalmente indicado por uma seta.

Vamos aplicar, agora, estas definições ao espaço da ferrovia da Figura 3.4(b). A trajetória já está determinada (as posições sobre os trilhos que define a trajetótia que passa pela curva s). Escolhamos a origem coincidente com a extremidade ao leste do trem mais próximo da plataforma. Neste ponto, indicamos a

coordenada como sendo zero. Se a escolha do sentido positivo for arbitrariamente escolhido como o oeste, a indicaremos com uma seta do lado esquerdo da trajetória s. O resultado da aplicação destas escolhas de origem e sentido positivo está ilustrada na Figura 3.4(c). Perceba que para esta escolha nosso objetivo foi cumprido e a qualquer ponto ao longo da trajetória s corresponderá um número.

Como exemplo, alguns pontos foram destacados na Figura 3.4(c). Chamaremos a coordenada em um ponto X qualquer de s_X. Assim, teremos $s_A = 0$ para o ponto A, coincidente com a origem. O ponto B, localizado a 40 m de distância da origem e no sentido positivo, terá coordenada $s_B = 40\,\text{m}$. Já o ponto C, também se localiza à 40 m da origem, sua coordenada, porém, será $s_C = -40\,\text{m}$, que não se confunde com o ponto B pois se localiza no sentido negativo em nosso referencial.

A trajetória foi subdividida de de 20 em 20 m apenas de forma ilustrativa. Isso não significa que somos capazes de localizar apenas os pontos localizados nessas demarcações. O ponto D, por exemplo, tem coordenada $s_D = 207\,\text{m}$.

Uma estrada praticamente confina o veículo a uma trajetória, já que nela o veiculo pode apenas seguir ou voltar no trecho delimitado para a pista. É evidente que um veículo pode deslocar-se lateralmente, recurso que o condutor utiliza para mudar de faixa ou ultrapassar, mas se formos simplificar a localização, a largura será sempre desprezível com relação ao comprimento de uma estrada, e esta "segunda dimensão" lateral é praticamente desprezível na localização do veículo. Por esta razão, as estradas contam com uma localização numérica semelhante a do referencial orientado, que utiliza um único número para localizar o veículo na estrada, representado ao longo da estrada em placas por meio de identificações do tipo km x. Nestes casos, o x marca a distância da origem, no caso o início da estrada, até a localização da placa. Como a estrada inicia no km 0, não faz sentido, no sistema de localização de uma estrada particular, tratar valores negativos para a localização, já que o carro simplesmente estaria fora desta estrada.

É importante salientar que a escolha do referencial (e, portanto, da origem e do sentido positivo) são arbitrárias. Fisicamente, para quaisquer escolhas destes parâmetros, o resultado será sempre o mesmo, mas a representação numérica deste resultado diferirá para cada escolha particular, permanecendo consistentes em cada referencial. Desta forma, os cálculos (algumas vezes inclusive sua complexidade) são afetados pelas definições de origem e sentido positivo escolhido para análise

do movimento.

A partir de agora, sempre que falarmos de *posição* ou *espaço* de um móvel ou de um corpo, estamos falando do valor numérico da coordenada deste corpo ou móvel.

Dimensão e Unidade das Posições

Para se determinar posições *sempre* será necessário medir comprimentos. Em alguns sistemas de coordenadas, a posição é determinada por pelo menos um comprimento, mas outras coordenadas podem ser definidas por ângulos. Em nosso estudo que é simplificado, nossa posição é uma única medida de comprimento, feita da origem ao local medido. Sendo assim, a dimensão da posição é a mesma das grandezas de comprimento.

Nas coordenadas geográficas temos um comprimento, a altura; e dois ângulos, a latitude e a logitude.

DIMENSÃO DA POSIÇÃO

$$\dim s = \mathsf{L}$$

No sistema internacional os comprimentos são medidos em metros.

UNIDADE DO SI DA POSIÇÃO

$$[s] = \text{m (no SI)}$$

3.1.2 Variação de Posição

O cálculo da variação de posição é feito como aquele exemplificado para variação de temperatura na Seção 2.9,

VARIAÇÃO DE POSIÇÃO

$$\Delta s = s_f - s_i. \tag{3.1}$$

A variação de posição assim calculada representa a distância entre o ponto inicial e o ponto final ao longo da trajetória, chamados aqui de i e f, respectivamente. Seu sinal representa se esta distância é percorrida no sentido positivo do referencial

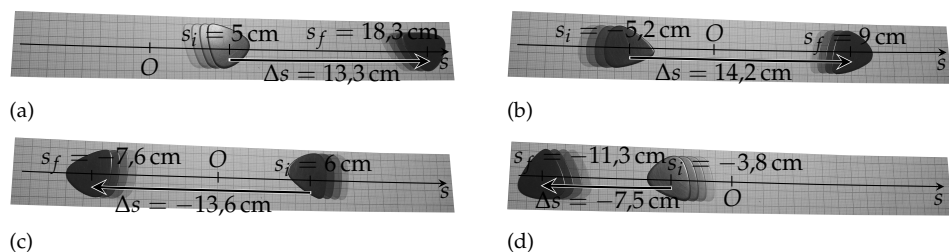



Figura 3.7: Exemplos da aplicação da variação de espaço e sua representação junto à trajetória.

(quando $\Delta s > 0$) ou no sentido negativo (quando $\Delta s < 0$) conforme ilustra a Figura 3.7.

Observando os exemplos, vemos que nos casos das Figuras 3.7(a) e 3.7(b), do início ao fim, o móvel segue na direção orientada como positiva no referencial. Sendo assim, se representarmos este deslocamento como uma seta que vai do início ao fim, ela apontará na mesma direção do sentido positivo do referencial (que por convenção indicamos com uma seta como propusemos em 3.1.1). Já nos casos das Figuras 3.7(c) e 3.7(d) do início ao fim o móvel segue na direção oposta à orientada como positiva no referencial, e as setas feitas como nos exemplos anteriores apontará na direção oposta da seta que indica o sentido positivo. A ilustração, portanto, deixa claro a distinção dos casos em que $\Delta s > 0$ e $\Delta s < 0$.

Como observação, atente que como a definição da variação de posição é puramente matemática e expressa pela diferença entre duas posições, uma no início e uma no fim de um estudo qualquer, ela não traz informações sobre o que ocorre no translado do início a fim. O móvel pode ter parado, passado do ponto final e então retornado, entre uma infinidade de outras situações, e até, para uma variação de posição nula ($\Delta s = 0$) o móvel pode ter viajado na velocidade da luz mas ter regressado ao mesmo ponto inicial por ocasição da aferição da posição final. Se quisermos ter uma ideia mais detalhada do movimento, teremos que verificar o tempo transcorrido na translação do ponto inicial ao final, ou ainda observar o móvel por pontos intermediários.

3.2 Tempo

A segunda grandeza que vamos estudar é o tempo.

> TEMPO
> Tempo é a qualidade dos corpos ou eventos que distingue *quando* eles estão ou ocorrem. Possibilita distinguir antes e depois, mais cedo, ou mais tarde e ordenar a sucessão dos eventos.

3.2.1 Medição de Tempo

A medição em termos matemáticos do tempo é praticamente a única forma praticada há muitos milênios. A dificuldade neste caso está associada a adoção de uma unidade para o tempo, já que, como vimos na seção 2.2, medir é comparar uma determinada unidade com a grandeza a ser medida. Para efetuar medidas desta forma, precisamos ser capazes de reproduzir esta unidade para compará-la com a grandeza. No caso de medidas de distância, isso significa ser capaz de reproduzir medidas iguais à unidade (ou em frações conhecidas da unidade) ao longo da distância para ser capaz de compará-los, o que é facilmente realizado com o uso de fitas, ou réguas marcadas com a reprodução destas unidades. Já no caso de medidas de tempo, precisaríamos reproduzir a unidade de tempo (ou suas frações conhecidas) ao decorrer do tempo que se deseja medir. Surgem logo três problemas para o estabelecimento de uma unidade de tempo:

i. É necessário encontrar fenômenos periódicos, de modo que o período, que se repita naturalmente, possa ser usado para comparação;

ii. Deve-se haver alguma garantia de que o período do fenômeno do item i não sofre variações, e;

iii. A duração do período deve ser compatível com a duração dos fenômenos.

A percepção destas regularidades temporais levou ao desenvolvimento do primeiro instrumento de medida de tempo, o calendário

Os primeiros fenômenos periódicos percebidos pelo homem foram os astronômicos: a passagem do dia, a mudança das estações, a mudança na configuração das estrelas no céu. O

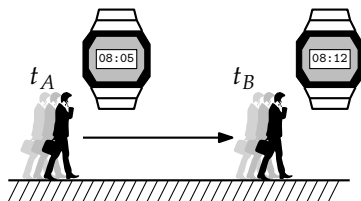



Figura 3.8: Registro dos instantes t_A e t_B que ocorrem às 08:05 e às 08:12, respectivamente, durante a locomoção de um indivíduo.

leitor pode verificar, porém, que as periodicidades astronômicas são demasiadamente longas para possibilitar sua utilização na comparação para medições em intervalos de tempo curtos. É fácil encontrar eventos significativos cuja duração é da ordem de segundos. 1 s, porém, corresponde a uma fração de 1/86 400 de um dia, que é o fenômeno astronômico mais curto de fácil observação.

Galileo Galilei utilizou em seus estudos da cinemática um relógio baseado na vazão de água por um pequeno orifício em um recipiente. Iniciado o estudo, o orifício era aberto, a água era coletada e ao fim do experimento era, então, pesada.

Este método proporciona uma medida indireta do tempo. Sendo demasiadamente afetado por características de difícil controle e reprodutibilidade (como a altura do líquido que escorre, a forma do orifício, o trabalho de recolhimento do líquido para pesagem) não é fácil sua aplicação para estabelecimento de uma unidade padrão.

As unidades de tempo mais curtas que utilizamos hoje só se tornaram facilmente reprodutíveis com a descoberta de fenômenos oscilatórios de curtos períodos. Os primeiros relógios utilizaram as oscilações de um pêndulo, descobertas por Galileu, As oscilações de uma mola vieram em seguida, o que possibilitou a construção dos relógios portáteis. Mais recentemente, as oscilações de cristais de quartzo passaram a ser empregadas em larga escala como referência para medidas de tempo. O que há de mais avançado e preciso para medidas de tempo é a utilização das oscilações atômicas, cuja utilização dá origem aos relógios atômicos, atualmente utilizados como padrão em contagem de tempo.

Nos experimentos físicos, o usual é que se utilize um cronômetro durante o experimento. O momento em que os eventos que se deseja estudar acontecem são denominados instantes. Matematicamente, os momentos são registrados em variáveis. O instante da ocorrência de um evento A, por exemplo, é registrada pela variável t_A. A Figura 3.8 exemplifica como se costuma registrar os instantes em experimentos na física. Neste exemplo registramos os instantâneos dos eventos A e B, em

que $t_A = 8\,\text{h}\,05\,\text{min}$ e $t_B = 8\,\text{h}\,12\,\text{min}$.

INSTANTE DE TEMPO
Instante de tempo é o registro do tempo em que ocorre um evento, análogo no tempo ao que o ponto é no comprimento.

Dimensão e Unidade das Medidas de Tempo

O tempo é uma grandeza básica cuja dimensão é, evidentemente, de tempo.

DIMENSÃO DO TEMPO

$$\dim t = \mathsf{T}$$

No sistema internacional o tempo é medido em segundos.

UNIDADE DO SI DA POSIÇÃO

$$[t] = \text{s (no SI)}$$

3.2.2 Variação de Tempo

Nos moldes do que foi feito na Seção 2.9, quando os instantes de tempo de interesse forem os instantes inicial e final da ocorrência de um fenômeno físico, denominados t_i e t_f, respectivamente, definimos

VARIAÇÃO DE TEMPO

$$\Delta t = t_f - t_i \tag{3.2}$$

como a variação de tempo, que corresponde à duração do fenômeno ou o tempo decorrido durante a ocorrência do fenômeno. Se na Figura 3.8, os eventos A e B correspondem respectivamente ao inicio e fim de um fenômeno, os instantes em que o indivíduo atende e desliga uma chamada no celular, por

exemplo, a variação de tempo neste fenômeno é de

$$\begin{aligned}\Delta t &= t_f - t_i \\ &= t_B - t_A = \\ &= 8\,\text{h}\,12\,\text{min} - 8\,\text{h}\,05\,\text{min} \\ \Delta t &= 7\,\text{min},\end{aligned}$$

e corresponderia no nosso exemplo a duração da chamada no celular.

Observe que dentre os fenômenos que estudaremos, o início sempre precede o fim, já que do contrário implicaria que, iniciado o fenômeno, voltamos no tempo para concluí-lo, ou que nosso cronometro é regressivo. Sendo assim, sempre teremos $t_f > t_i$, e, portanto, $\Delta t > 0$, sempre. Não faz sentido analisar o sinal da variação de tempo.

3.3 Movimento e Repouso

Agora que já sabemos contar o tempo, descrever a posição e, especialmente, escolher um referencial, podemos definir que

> REPOUSO
> Um corpo encontra-se em repouso com relação a um determinado referencial se sua posição não muda neste referencial.

O passageiro B no avião da Figura 3.9 está em repouso se o referencial é o passageiro A, já que, digamos, encontra-se sempre na posição três metros à esqueda do passageiro A. Não importa se o avião está parado no portão aguardando autorização para taxiar, ou se está em pleno voo. Se o referencial for o passageiro A, e a posição permanecer três metros à esqueda do passageiro A, sua posição não muda, e portanto, ele permanece em repouso. É fundamental que se defina que o referencial é o passageiro A, já que afirmar que um passageiro de um avião em pleno voo está em repouso parece uma aberração(!), mas está totalmente de acordo com nossa definição de repouso.

Figura 3.9: Posição dos passageiros A e B dentro de um avião.

A outra definição, que remete a negação do repouso é que

MOVIMENTO
Um corpo encontra-se em movimento com relação a um determinado referencial se sua posição muda neste referencial.

Assim, se os passageiros A e B encontram-se voando na Figura 3.10 e são observados pelo indivíduo C do solo, teremos a seguinte situação: se o referencial for A, B encontra-se em repouso e C em movimento; se o referencial for C, A e B encontram-se em movimento.

Figura 3.10: Posição dos passageiros A e B dentro de um avião e C que os observa do solo.

Nós simplesmente afirmamos que A e B estão em movimento com relação a C, o que significa que sabemos de alguma forma que a posição de A e B está mudando se C é o referencial. Neste exemplo a mudança de posição é meio óbvia, já que o avião se distancia de C. A melhor forma de verificar a mudança de posição é por meio da descrição da situação matematicamente, o que possibilita verificar que as coordenadas do corpo mudam ao longo do tempo, ou seja, a posição está mudando.

Movimento e repouso são recíprocos, se num referencial X, Y encontra-se em movimento (ou repouso), no referencial Y, X também se encontrará em movimento (ou repouso).

Para a cinemática, durante a ocorrência do evento um carro choca-se com um poste, se o poste for o referencial, o carro em movimento aproximou-se do poste e com ele chocou-se. Já se o referencial for o carro, o poste em movimento que se aproxima do carro, e choca-se com ele. Não interessa o que causa o movimento, qual a motivação ou origem deste movimento, assim, não faz diferença se é o carro ou poste que se move, tudo depende de que referencial que se usa.

O estudo das causas do choque do carro com o poste sugeriria que como o carro impulsiona o solo com os pneus, que giram por influencia da combustão que põe o motor em movimento, então é o carro que se impulsiona contra o poste, mas para a cinemática isto não importa.

3.4 Descrição do Movimento — Associação de Tempo e Espaço

Se já somos capazes de descrever tempo e posição, já somos capazes de descrever um movimento, para tal, basta associar a

posição ao tempo, ou seja, conectar a informação do local onde o corpo se encontra com quando ele se encontra neste local.

Vamos resumir nas próximas seções algumas formas de fazer esta correspondência entre tempo e espaço.

3.4.1 Associação de Tempo e Espaço por Tabela de Observações

Tabela 3.1: Observações $s \times t$ do movimento na estrada.

	t[h]	s[km]
A	11,25	15
B	11,75	55
C	12,5	55
D	13,5	155
F	15,5	265

Suponha que durante uma viagem de 250 km, o motorista note que ao entrar na estrada às 11 h 15 min, logo avista a indicação KM 15 em uma placa de trânsito, que chamaremos de instante A. Perto do horário de almoço, às 11 h 45 min, para em um conhecido restaurante localizado no KM 55 para fazer a refeição, que chamaremos de instante B. Já alimentado, retoma a viagem às 12 h 30 min no instante C. Durante a viagem, passa por um posto de fiscalização no instante D, importante ponto de referência localizado no KM 155, às 13 h 30 min, e segue pelo trecho final da viagem até que chega ao KM 265 às 15 h 30 min, que concluiremos chamando de instante F.

Temos 5 observações de tempo feitas pelo motorista ao longo de posições da estrada. A Tabela 3.1 associa estas posições s aos tempos t para os instantes de A a F. A posição s é obtida por um referencial orientado com origem no marco de KM 0 e com sentido positivo coincidente com o sentido em que cresce a marcação das placas ao longo da estrada, e o t pela simples conversão do horário observado no relógio (que marca horas e minutos) para horas.

As tabelas são a forma mais rústica de se descrever o movimento. Ela expõe um "instantâneo" do movimento a cada linha quando descreve um instante em particular e a posição em que o corpo se encontra neste instante, configurando uma sequência de instantes tão longa quando a quantidade de linhas da tabela, o que mostra como varia a posição do corpo, e portanto seu movimento. O problema da tabela é que ela não informa o que acontece no movimento entre dois instantâneos. Por exemplo, entre os instantes D e F em que o motorista conclui a viagem, sabemos apenas que ele percorre 110 km em 2 h pois sabemos onde e quando ele estava em D e em F. Mas ao longo destes 110 km muito movimento pode ter ocorrido. Ele pode ter parado e trocado um pneu, ter acelerado durante uma ultrapassagem, e até ter voltado para visitar uma quitanda.

Esta limitação da tabela, porém, não implica que a associação do tempo e espaço desta forma e, portanto, a descrição do movimento por este método seja ineficaz. Significa apenas que aquele que coleta os instantes deve escolher a distância entre cada instante e a quantidade de instantes com critério de modo a se descrever com os detalhes que se deseje o movimento em estudo.

Como exemplo de um caso muito semelhante à tabela na qual o movimento é descrito com grande fidelidade é o vídeo do cinema. Ele nada mais é do que um conjunto de instantes capturados que podem perfeitamente ser organizados em uma tabela: o instante t da captura em uma coluna e o instantâneo (fotografia) em outra. Ou ainda, se quisermos nos aproximar mais de nosso exemplo inicial, o tempo t em uma coluna, e a localização de um ponto deste vídeo na outra.

As capturas de um vídeo são de uma imagem completa, e portanto de uma diversidade de posições de cores.

Nesta descrição, a limitação de que o movimento é simplesmente composto por uma quantidade espaçada de instantes é superada pela limitação de nosso próprio sentido da visão, incapaz de perceber uma grande quantidade de instantâneos expostos em sequência, e o que percebemos é meramente uma fusão entre os quadros consecutivos que simula com grande proximidade o movimento real. É evidente, porém, que um pequeno vídeo de 5 min formaria uma tabela com aproximadamente 7.200 linhas para um vídeo filmado a 24 quadros por segundo, que já é um padrão ultrapassado, mas mostra que esta tabela de posições é eficaz para a descrição de movimento e é utilizada amplamente.

3.4.2 Associação de Tempo e Espaço por Gráfico $t \times s$

Uma forma organizada e amplamente utilizada de se acompanhar o movimento é observá-lo em um gráfico $t \times s$, em que cada ponto do gráfico é um par (t, s), ou seja, quando e onde o corpo se encontra, de modo que cada ponto do gráfico localiza o corpo no tempo e no espaço.

A Figura 3.11 exemplifica este processo de organizar os pares de espaço e tempo em uma figura ao registrar no gráfico os instantes listados na Tabela 3.1. Em um gráfico é fácil observar a progressão do movimento. Como ele se inicia às 11 h 15 min, como o móvel perece permanecer no mesmo local

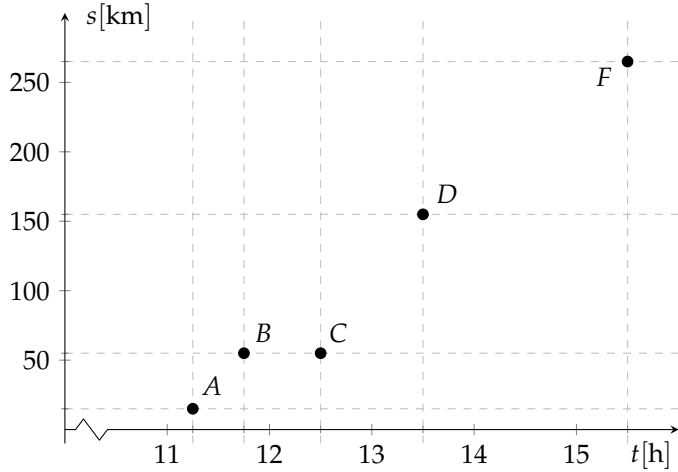



Figura 3.11: Gráfico $t \times s$ dos dados da Tabela 3.1.

das 11 h 45 min e como parece prosseguir a partir de então até o KM 265. Deixa ainda claro que entre os pontos não há preenchimento, então não sabemos como se dá a progressão de um ponto a outro, se é através de uma reta, ou uma curva qualquer. Se for este último caso, por qual curva o móvel progride em sua representação no gráfico? Caso queiramos ter uma noção mais fiel do movimento, percebemos também que teríamos que preencher o gráfico com tantos pontos quantos fossem necessários para que não restasse dúvida sobre como o móvel progride de um ponto a outro.

Na seção que se segue vamos tentar preencher este vazio entre os pontos.

3.4.3 Associação de Tempo e Espaço por Função — A Equação Horária do Espaço

Se transformamos ambos, tempo e espaço, em números, ou seja, se os descrevemos matematicamente, deveríamos também utilizar uma forma matemática de associar dois números de modo a completar nossa descrição do movimento. A *função* é a ferramenta que utilizamos para associar uma variável independente x a uma variável que dela depende y. Para dizer que y depende de x, dizemos que y é função de x e escrevemos $y(x)$.

Nosso caso é exatamente este. O homem tem uma percepção que o leva a crer que não há controle sobre o tempo. Por esta razão, a variável independente em descrições físicas quase sempre é o tempo t. Como temos convencionado chamar a posição de s, a nossa posição dependerá de em que instante t observamos o movimento, e portanto, a posição será uma função do tempo, e escreveremos $s(t)$.

> EQUAÇÃO HORÁRIA DO ESPAÇO
> Equação horária do espaço é uma função $s(t)$ que associa a cada instante t uma posição s para descrever um movimento.

Uma tabela construída nos moldes do que expusemos na seção 3.4.1 pode representar apenas um extrato desta relação funcional. Pela função conseguimos, portanto, superar a limitação de desconhecer o que acontece entre dois instantes. Se conhecêssemos a função $s(t)$ que deu origem à Tabela 3.1, para saber o que ocorre em um instante E entre os instantes D e F, nos bastaria aferir a função em um t_E, em que $13{,}5\,\mathrm{h} < t_E < 15{,}5\,\mathrm{h}$ e descobriríamos a posição $s(t_E)$ que o corpo tem no instante E.

Se na descrição de movimentos pro meio de uma tabela tínhamos a limitação de desconhecer o que acontece entre instantes tabelados, já que eles não são apresentados na tabela, ao menos conhecemos os valores registrados na tabela. Em geral estes valores tabelados representam observações medidas no estudo do movimento, e sabe-se como as medidas foram obtidas. Então, conhece-se bem o quão confiável são os dados tabelados.

A limitação de descrever o movimento por meio de uma função é saber de que função se trata cada movimento observado, ou, que função descreve cada movimento em particular. Caímos então no problema de como determinar a função, o que em geral é feito por meio das próprias observações.

Como exemplo de como interconectar tabelas com funções e de como as funções surgem, vamos usar apenas os instantes D e F da Tabela 3.1 para inferir onde se encontraria o carro num instante E em que $t_E = 14{,}5\,\mathrm{h}$. Para isto, seria necessário conhecer como o movimento ocorreu, ou qual a função que descreve o movimento naquele trecho. Apenas como exemplo,

A função que vamos encontrar será uma aproximação apenas para o trecho de D a F. Aplique os valores de t para os outros pontos na Equação 3.4 e verifique que não baterá com os valores da Tabela 3.1.

já que não sabemos nada sobre como o motorista conduziu seu carro ao longo da estrada naquele trecho, vamos simplesmente supor que a função entre t e s é uma função polinomial do 1º grau neste trecho, ou seja

$$s(t) = m + nt. \tag{3.3}$$

Descobrimos m e n substituindo os valores de (t,s) da Equação 3.3 por $(13{,}5\,\text{h}, 155\,\text{km})$ e $(15{,}5\,\text{h}, 265\,\text{km})$ e resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} 155 = m + 13{,}5n \\ 265 = m + 15{,}5n, \end{cases}$$

de onde obtemos $m = -587{,}5\,\text{km}$ e $n = 55\,\text{km/h}$, ou seja,

$$s(t) = -587{,}5 + 55t. \tag{3.4}$$

Tabela 3.2: Observações $s \times t$ pela função.

	t[h]	s[km]
D	13,5	155
E	14,5	210
F	15,5	265

No instante E hipotético, em que $t_E = 14{,}5\,\text{h}$ teríamos a posição s, que chamaremos de s_E dada por

$$\begin{aligned} s_E &= s(t_E) = s(14{,}5) \\ &= -587{,}5 + 55 \times 14{,}5 \\ s_E &= 210\,\text{km}. \end{aligned}$$

Ou seja, caso entre os instantes D e F o carro realmente esteja se movimentando conforme uma função polinomial do 1º grau, então às 14 h 30 min o carro passaria pelo indicador do KM 210 e as observações poderiam ser resumidas como na Tabela 3.2.

O prolongamento de $s(t)$ no gráfico da Figura 3.12 mostra que $s(t)$ só vale para nossas hipóteses sobre o trecho de E até F pois o mesmo não passa em A, B ou C.

Agora, da mesma forma como elaboramos um gráfico para os valores da Tabela 3.1, apresentamos na Figura 3.12 tanto os pontos D, E e F da Tabela 3.2 como todos os pontos da função encontrada na Equação 3.4.

3.5 Velocidade

Já sabemos como modelar posição e tempo matematicamente, como associá-los para entender como ocorre o movimento e também apresentamos uma ideia, uma definição de posição e tempo nas seções 3.1 e 3.2 Vamos agora apresentar uma ideia para o que é velocidade e mostrar como esta medida também

Figura 3.12: Gráfico $t \times s$ dos pontos da Tabela 3.2 e da função da Equação 3.4.

associa tempo e espaço e evidencia algumas características do movimento. O objetivo é mostrar que independente da física e da matemática, a ideia de velocidade é algo associado ao nosso entendimento do funcionamento do movimento. Certamente uma criança tem essa ideia de velocidade, assim como o tem um cachorro, um leão ou um macaco, embora certamente nenhum deles tenha ousado expressar em prosa esta definição, e muito menos matematicamente.

> VELOCIDADE
> Velocidade é o quão rápido muda a posição de um corpo.

3.5.1 Velocidade Média

Acompanhando a definição conceitual que demos na seção 3.5, vamos procurar agora definir matematicamente, ou se quisermos ser mais ousados, diremos que tentaremos descrever esse conceito matematicamente.

Podemos listar as seguintes observações do que foi definido na seção 3.5

i. estamos lidando com variação de posição, o que certamente envolverá Δs na descrição matemática;

Dizer que as definições matemáticas da física são descrições de conceitos físicos é interessante ao ressaltar que a ideia é anterior a conta, e que portanto a matematicidade não é arbitrária.

ii. também lidamos com o quão rápido ocorre, o que sugere que devemos envolver o tempo decorrido na mudança de posição, ou seja, Δt deverá ser parte da definição matemática;

iii. quanto mais distância se percorre, mais veloz deve-se ser. Particularmente, se se considera um intervalo fixo de tempo esta observação é óbvia já que, alguém que corre 200 m em 1 min certamente tem maior velocidade que alguém que corre 100 m neste mesmo tempo, 1 min, por exemplo, o que significa que a velocidade deve crescer com Δs; e

iv. quanto mais tempo se passa num percurso, menos veloz deve-se ser. Particularmente, se se considera um percurso fixo, alguém que corre uma maratona em 2,5 h certamente tem maior velocidade que alguém que corre uma maratona em 4 h, por exemplo, o que significa que a velocidade deve decrescer com um crescimento de Δt.

Na ciência, devemos ser simples, tal como expusemos na seção 1.1, e a proporção é uma das formas de descrição mais simples que se pode utilizar. Assim, a velocidade pode ser descrita como diretamente proporcional a distância percorrida, ou Δs, e inversamente proporcional ao tempo decorrido, ou Δt.

Mais adiante vamos justificar porque esta velocidade é *média*, e não simplesmente *velocidade*.

Definimos, então, esta velocidade expressa da forma mais simples possível, chamada velocidade média v_m, como

VELOCIDADE MÉDIA

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{3.5}$$

Agora vamos verificar a aderência desta definição às observações extraídas do conceito que listamos anteriormente. Veja que a definição utiliza apenas a razão entre Δs e Δt, sendo assim, cumpre os itens i e ii. Para discutir a o cumprimento do item iii vamos observar os exemplos a seguir.

Ex. 1 A velocidade média de alguém que corre 100 m em 1 min é

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{100\,\text{m}}{1\,\text{min}}$$
$$v_m = 100\,\text{m/min}.$$

Ex. 2 A velocidade média de alguém que corre 200 m em 1 min é

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{200\,\text{m}}{1\,\text{min}}$$
$$v_m = 200\,\text{m/min}.$$

Nota-se que do exemplo 1 para o exemplo 2 há um aumento na variação da posição, mantendo-se o tempo decorrido constante. E pela definição da velocidade média, a velocidade também aumentou como consequência deste aumento do Δs, o que mostra que a definição atende ao item iii.

Por fim, para verificar a adequação ao item iv, vamos observar os exemplos a seguir.

Ex. 3 A velocidade média de alguém que corre uma maratona em 2,5 h é

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{42\,\text{km}}{2{,}5\,\text{h}}$$
$$v_m = 16{,}8\,\text{km/h}.$$

A prova conhecida como maratona consiste no percurso de aproximadamente 42 km para representar a lendária distância coberta pelo soldado Fidípides do local da Batalha de Maratona à Atenas.

Ex. 4 A velocidade média de alguém que corre uma maratona em 4 h é

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{42\,\text{km}}{4\,\text{h}}$$
$$v_m = 10{,}5\,\text{km/h}.$$

Veja que do exemplo 3 ao 4 há um aumento no tempo decorrido sendo a variação de espaço fixa, e a consequência deste aumento no tempo para concluir o percurso é uma diminuição na velocidade medida, o que está de acordo com a observação do item iv.

Esta definição de velocidade média se adequou, portanto, ao conceito de velocidade e às observações que fizemos acerca deste conceito, o que nos permite ser ousados e dizer que a definição matemática da Equação 3.5 serve muito bem como modelo matemático de velocidade.

3.5.2 Velocidade Instantânea

Assim como quando descrevemos o movimento pela observação de alguns instantes listados em uma tabela na Seção 3.4.1

e percebemos que deixamos informações sobre o movimento obscurecidas entre os instantes observados, a velocidade média também proporciona este desconhecimento sobre o que realmente aconteceu ao longo do movimento.

No exemplo da Tabela 3.1, se calcularmos a velocidade média de D à F, teremos

$$\begin{aligned} v_{m-DF} &= \frac{\Delta s}{\Delta t} \\ &= \frac{s_f - s_i}{t_f - t_i} \\ &= \frac{s_F - S_D}{t_F - t_D} \\ &= \frac{265\,\text{km} - 155\,\text{km}}{15{,}5\,\text{h} - 13{,}5\,\text{h}} \\ &= \frac{110\,\text{km}}{2\,\text{h}} \\ v_{m-DF} &= 55\,\text{km/h}. \end{aligned}$$

Observe que o tempo decorrido nesta nossa medida é de 2 h. Para a movimentação de um carro controlado por um ser humano muito pode acontecer ao longo de 2 h. É impossível conceber que o ponteiro do velocímetro tenha permanecido imóvel sobre a marcação de 55 km/h ao longo das 2 h. Ele pode ter marcado 120 km/h numa ultrapassagem e até 0 ao parar para uma troca de pneu ou preso no trânsito devido a obras na estrada. É necessário, então, encontrarmos uma nova medida, mais precisa, para que tenhamos uma ideia mais fiel do que está acontecendo no movimento. Neste caso, a velocidade média de um carro na estrada descreve mal o que pode ter acontecido com o móvel quando consideramos um intervalo de 2 h.

O que consideramos um tempo longo demais para fidelidade de medida da velocidade varia com o tipo do movimento. As 2 h que para um carro na estrada é muito, pode ser ideal para observar um cometa, e insuficiente para observar a deriva continental.

Fica claro que se quisermos uma ideia mais fiel da medida da velocidade, deveremos encurtar a distância entre início e o fim considerados nos cálculos de Δs e Δt, já que diminuiremos as chances de o móvel mudar seu comportamento.

Esta nova medida de velocidade que queremos desenvolver deve, então, fazer Δt ser o menor possível, ou seja, quase 0. A variação de tempo Δt, porém, nunca poderá ser igual a zero, já que neste caso, nenhum tempo se passou e nenhum movimento pode ter ocorrido.

Esta situação em que fazemos a variação de tempo ser o menor possível, mas ser diferente de zero, deu origem ao conceito matemático de "limite tendendo a zero". No nosso caso, quem estará tendendo a zero é o Δt, e escreveremos $\lim\limits_{\Delta t \to 0}$.

Sempre que quisermos ter uma ideia da velocidade que seja a mais fiel possível calcularemos a velocidade instantânea.

Se lê "v é igual ao limite de Δt tendendo a 0 de Δs sobre Δt."

VELOCIDADE INSTANTÂNEA

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{3.6}$$

A velocidade instantânea é puramente matemática, já que nela fazemos Δt ser o mais próximo de zero *possível*. Se começássemos por 0,01, por exemplo, poderíamos nos aproximar mais de zero descendo uma ordem de grandeza, alcançando 0,001, e em seguida mais uma para alcançar 0,0001 e assim sucessivamente. O leitor logo percebe que podemos construir sequências infinitamente longas que sempre se aproximam de zero mas nunca o atingem. Ele é então inclinado a acreditar que nunca conseguiremos achar um valor para a velocidade instantânea, pois a cada nova aproximação na sequência ele tem um novo valor para a possível velocidade instantânea, mas ele ainda não atingiu o "mais próximo possível", o que o faz seguir para um valor menor ainda e ele teria que continuar este processo infinitamente. Por está razão, devemos encontrar um artifício puramente matemático para encontrar "o mais próximo possível de zero".

Vamos exemplificar esta aproximação de duas formas. A primeira com uma ideia já familiar ao leitor, a ideia de dízima, que mostrará que o limite terá um resultado *exato* apesar de sempre podermos nos aproximar mais e mais de zero com os exemplos.

Ex. 5 A dízima $0{,}999\ldots$ é a unidade, ou seja,

$$0{,}999\ldots = 1.$$

Para mostrar como está dízima é matematicamente o mesmo que a unidade, vamos chamar $0{,}9999\ldots$ de d.

$$d = 0{,}999\ldots \tag{3.7}$$

Multiplicamos ambos os membros desta equação por 10 obtendo

$$10d = 9{,}999\ldots,$$

e separamos de ambos os membros a dízima d da parte explicitamente inteira, ou seja $10d = d + 9d$ e $9{,}999\ldots = 9 + 0{,}999\ldots$, que podemos escrever como

$$9d + d = 9 + 0{,}999\ldots. \tag{3.8}$$

Agora substituímos o valor para $0{,}999\ldots$ da Equação 3.7 na 3.8 e obtemos a expressão que é livre de dízimas

$$9d + d = 9 + d,$$

que desenvolvemos em

$$\begin{aligned} 9d &= 9 + d - d \\ 9d &= 9 \\ d &= \frac{9}{9} \\ d &= 1, \end{aligned}$$

ou seja, unindo este último resultado a Equação 3.7 obtemos

$$0{,}999\ldots = 1.$$

Para o próximo exemplo vamos utilizar limite e retomar o exemplo anterior para não precisarmos continuar qualquer sequência infinitamente longa, mas simplesmente argumentar como achar o valor exato.

Ex. 6 O limite

$$\lim_{\Delta t \to 0} 1 - \Delta t = 1,$$

ou seja, é um valor exato.

Vamos chamar de n a expressão que queremos calcular o limite.

$$n = 1 - \Delta t$$

Agora vamos iniciar com $\Delta t = 0{,}1$ e diminuir uma ordem de grandeza por vez e aferir o valor de n. Os valores calculados para n estão resumidos na Tabela 3.3. Esta tabela não constitui uma demonstração formal, mas esclarece como a medida que Δt diminui, n se aproxima da dízima d do Exemplo 5, o que nos leva a concluir que

$$\lim_{\Delta t \to 0} 1 - \Delta t = 0{,}999\ldots = 1.$$

Tabela 3.3: Possível sequência para n quando $\Delta t \to 0$.

Δt	n
0,1	0,9
0,01	0,99
0,001	0,999
$\vdots$	$\vdots$
$\to 0$	$0{,}999\ldots$

> Velocidade instantânea é uma definição matemática que calcula a velocidade com fidelidade máxima com um Δt menor possível, mas na prática só calculamos uma velocidade média para um Δt menor exequível para o aparato experimental.

No próximo exemplo, por fim, vamos calcular a velocidade instantânea utilizando limites.

Ex. 7 Se a posição s de um móvel é dada em função do tempo por

$$s(t) = 4t - t^2,$$

em que s é dado em metros e t em segundos. Quanto vale

(a) a velocidade média considerando o início em $t_{i1} = 0\,\text{s}$ e o fim em $t_{f1} = 4\,\text{s}$?

(b) a velocidade média considerando o início em $t_{i2} = 2\,\text{s}$ e o fim em $t_{f2} = 4\,\text{s}$?

(c) a velocidade instantânea em $t_A = 0$?

(d) a velocidade instantânea em $t_B = 1\,\text{s}$?

(e) a velocidade instantânea em $t_C = 2\,\text{s}$?

Como a velocidade média é dada por

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_f - s_i}{t_f - t_i},$$

precisamos saber apenas estes quatro números, o início e fim da posição e do tempo para calculá-la. Como já temos os valores de início e fim do tempo para responder aos itens a e b precisamos calcular apenas as posições, para as quais obtemos

$$\begin{aligned} s_{i1} &= s(t_{i1}) = s(0) \\ &= 4 \times 0 - 0^2 \\ s_{i1} &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{i2} &= s(t_{i2}) = s(2) \\ &= 4 \times 2 - 2^2 \\ s_{i2} &= 4\,\text{m; e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{f1} = s_{f2} = s(t_{f1}) = s(t_{f2}) &= s(4) \\ &= 4 \times 4 - 4^2 \\ s_{f1} = s_{f2} &= 0. \end{aligned}$$

Vamos chamar de v_{m1} a velocidade média do item a e de v_{m2} a do item b. Então,

$$\begin{aligned} v_{m1} &= \frac{s_{f1} - s_{i1}}{t_{f1} - t_{i1}} \\ &= \frac{0-0}{4-0} \\ v_{m1} &= 0, \text{ e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{m2} &= \frac{s_{f2} - s_{i2}}{t_{f2} - t_{i2}} \\ &= \frac{0-4}{4-2} \\ v_{m1} &= -2\,\text{m/s}. \end{aligned}$$

Assim, apesar de sabermos que a posição do móvel muda pois a função $s(t)$ não é constante, o cálculo da velocidade média do item a resultou em $v_{m1} = 0$, já que no início e no fim o móvel se encontrava na mesma posição, o que ilustra a dificuldade da velocidade média de representar o que ocorre entre os momentos inicial e final do movimento.

Já no item b, encontramos $v_{m2} = -2\,\text{m/s}$, que indica o deslocamento no sentido negativo do referencial executado pelo móvel entre 2 e 4 s.

Vamos agora calcular v_A, a velocidade instantânea em t_A do item c pela definição da velocidade instantânea

$$v_A = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s_f - s_i}{\Delta t}$$

Neste caso, nosso Δt será o mais próximo possível de zero, mas não podemos estipular um valor para ele. Calcularemos tudo em função de Δt com o intuito de encontrar uma expressão como a do Exemplo 6 que nos mostrará um valor exato para a velocidade instantânea. Devemos lembrar que iremos aferir nossa posição em $t_A = 0$, assim,

$$s_i = s(t_A) = s(0) = 0,$$

mas ao fim teremos

$$\begin{aligned} s_f &= s(t_A + \Delta t) = s(0 + \Delta t) \\ &= 4(0 + \Delta t) - (0 + \Delta t)^2 \\ s_f &= 4\Delta t - \Delta t^2. \end{aligned}$$

Substituindo estes valores de s_f e s_i obtemos para v_A

$$\begin{aligned} v_A &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overbrace{4\Delta t - \Delta t^2}^{s_f} - \overbrace{0}^{s_i}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4\Delta t}{\Delta t} - \frac{\Delta t^2}{\Delta t}, \end{aligned}$$

e como Δt é o menor possível mas $\Delta t \neq 0$, então,

$$\begin{aligned} v_A &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4\cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}} - \frac{\Delta t^{\cancel{2}}}{\cancel{\Delta t}} \\ v_A &= \lim_{\Delta t \to 0} 4 - \Delta t. \end{aligned}$$

Como esperávamos, encontramos uma expressão tal como a do Exemplo 6, mas que neste caso tenderia à dízima 3,999 . . ., ou seja, pelo mesmo raciocínio daquele exemplo

$$v_A = 4\,\text{m/s}.$$

De forma similar, podemos calcular para o item d

$$v_B = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s_f - s_i}{\Delta t},$$

mas desta vez deveremos calcular em $t_B = 1\,\text{s}$, de modo que

$$\begin{aligned} s_i &= s(t_B) = s(1) = 4 \times 1 - 1^2 \\ s_i &= 3\,\text{m, e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_f &= s(t_B + \Delta t) = s(1 + \Delta t) \\ &= 4(1 + \Delta t) - (1 + \Delta t)^2 \\ &= 4 + 4\Delta t - 1 - 2\Delta t - \Delta t^2 \\ s_f &= 3 + 2\Delta t - \Delta t^2. \end{aligned}$$

Substituindo na expressão para v_B, obtêm-se

$$
\begin{aligned}
v_B &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overbrace{\cancel{3} + 2\Delta t - \Delta t^2}^{s_f} - \overbrace{\cancel{3}}^{s_i}}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2\cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}} - \frac{\Delta t^{\cancel{2}}}{\cancel{\Delta t}} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} 2 - \Delta t \\
v_B &= 2\,\mathrm{m/s}.
\end{aligned}
$$

Por fim, no caso do item e é análogo, e como resultado se encontra $v_C = 0$.

3.5.3 Considerações sobre Velocidade Média e Velocidade Instantânea

As definições de velocidade dadas pelas Equações 3.5 e 3.6 nos permitem tecer as seguintes considerações:

i. A velocidade média considera *dois* instantes, o de início e o de fim do movimento em estudo, e tenta resumir o movimento que ocorre entre estes dois instantes com apenas um número.

ii. A velocidade instantânea, por considerar o tempo decorrido entre o início e o fim da observação infinitamente pequeno, tenta descrever o que ocorre naquele *único* instante, de modo que a ideia de início e fim expressos pelas variações Δs e Δt que sugerem o prolongamento da observação por um intervalo se perde no por se considerar um tempo decorrido infinitamente pequeno, e a medida é pontual ou instantânea.

iii. Pode-se imaginar a velocidade instantânea como uma velocidade média infinitamente precisa, já que seu cálculo é idêntico porém com a restrição de que $\Delta t \to 0$.

iv. Para todos os fins práticos, quando se tem a intenção de calcular a velocidade instantânea (num automóvel, por exemplo), calcula-se uma velocidade média com um pequeno intervalo de tempo (ou de distância, dependendo do aparato de medida) e a esta medida chama-se simplesmente de velocidade com se instantânea fosse.

v. A velocidade média representa a velocidade instantânea e constante que o móvel deveria ter para fazer o percurso da posição inicial a final no mesmo tempo decorrido..

Não faremos demostração formal do item v, mas argumentaremos a favor desta afirmação na seção 3.5.7

3.5.4 Dimensão e Unidade da Velocidade

As duas definições para velocidade que vimos nas Equações 3.5 e 3.6 determinam que a velocidade é uma razão entre uma variação de posição e uma variação de tempo, que tem respectivamente dimensão de L e T, e, portanto,

$$\dim v = \frac{\dim s}{\dim t} = \frac{\mathsf{L}}{\mathsf{T}}.$$

DIMENSÃO DA VELOCIDADE

$$\dim v = \mathsf{LT}^{-1}$$

A unidade do SI da velocidade será também a razão entre as unidades de posição e tempo.

UNIDADE DO SI DA POSIÇÃO

$$[v] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \text{ (no SI)}$$

3.5.5 Variação de Velocidade

$$\Delta v = v_f - v_i. \tag{3.9}$$

3.5.6 Equação Horária da Velocidade

O Exemplo 7 apresentou uma variação da velocidade instantânea ao longo do tempo, já que em $t_A = 0$ encontramos $v_A = 4\,\mathrm{m/s}$, em $t_B = 1\,\mathrm{s}$ temos $v_B = 2\,\mathrm{m/s}$ e por fim em $t_C = 2\,\mathrm{s}$, $v_C = 0\,\mathrm{m/s}$.

Esta variação sugere que possa haver uma relação funcional entre a velocidade instantânea v e o tempo t, assim como foi feito na Seção 3.4.3 para s em função de t, o que vamos verificar ser verdadeiro no Exemplo 8 em que encontraremos a função $v(t)$ para o movimento determinado pela $s(t)$ do Exemplo 7.

Ex. 8 A posição s de um móvel é dada em função do tempo por

$$s(t) = 4t - t^2,$$

em que s é dado em metros e t em segundos. Obtenha a velocidade instantânea v em função do tempo.

A velocidade instantânea é definida por

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s_f - s_i}{\Delta t}$$

De $\Delta t = t_f - t_i$ se obtém $t_f = t_i + \Delta t$ e se chamamos t_i genericamente de t, então $t_f = t + \Delta t$

Neste caso, vamos calcular a velocidade para um tempo genérico t, ou seja, $t_i = t$ e $t_f = t + \Delta t$ de modo que ao expressar s_f e s_i por meio de t e Δt encontremos ao fim uma expressão que dependa unicamente de t. Para tal, vamos substituir os valores de t_f e t_i para encontrar s_f e s_i.

$$s_i = s(t_i) = s(t) = 4t - t^2.$$

Nota-se logo que quando se usa um tempo genérico t para tempo inicial, encontra-se a posição genérica $s(t)$ como a posição inicial s_i. Já a posição final é

$$\begin{aligned} s_f &= s(t_f) = s(t + \Delta t) \\ &= 4(t + \Delta t) - (t + \Delta t)^2 \\ &= 4t + 4\Delta t - t^2 - 2t\Delta t - \Delta t^2 \\ s_f &= 4t - t^2 - 2t\Delta t + 4\Delta t - \Delta t^2, \end{aligned}$$

que ao substituir na expressão para velocidade instantânea resulta em

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overbrace{4t - t^2 - 2t\Delta t + 4\Delta t - \Delta t^2}^{s_f} - \overbrace{(4t - t^2)}^{s_i}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cancel{4t} - \cancel{t^2} - 2t\Delta t + 4\Delta t - \Delta t^2 - \cancel{4t} + \cancel{t^2}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4\cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}} - \frac{2t\cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}} - \frac{\Delta t^{\cancel{2}}}{\cancel{\Delta t}} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} 4 - 2t - \Delta t \\ v(t) &= 4 - 2t. \end{aligned}$$

Se a função horária do espaço original tinha posição em m e tempo em s, então a função $v(t)$ que encontramos terá unidade de m/s.

Este exemplo é um caso particular de como se pode ter a velocidade em função do tempo, o que chamaremos de *equação horária da velocidade*.

EQUAÇÃO HORÁRIA DA VELOCIDADE
Equação horária da velocidade é uma função $v(t)$ que associa a cada instante t a velocidade instantânea v em que se encontra o móvel.

3.5.7 Gráfico $t \times s$ e Velocidade

Se as medidas de velocidade fazem uso apenas das variações de espaço e tempo, é razoável investigarmos que informações relativas à velocidade podemos extrair do gráfico $t \times s$. Já que esta grandeza não está explícita, mas sendo tempo e espaço tudo que se precisa saber para se ter informações de velocidade, ela deve estar indiretamente expressa no gráfico. Para tal, vamos observar um esboço de gráfico apresentado na Figura 3.13.

Velocidade Média no Gráfico $t \times s$

Vamos iniciar por observar a velocidade média. Neste caso, temos que definir o início e fim do movimento em estudo e para o qual estudaremos a velocidade média. Marcamos no esboço os pontos I e F arbitrariamente para exemplificar o início e fim escolhidos. Os pontos $I = (t_i, s_i)$ e $F = (t_f, s_f)$ contém todos os valores necessários para o cálculo da velocidade média, já que

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_f - s_i}{t_f - t_i}.$$

Vamos, então, marcar no esboço estes valores que definem a velocidade média: s_f, s_i, t_f e t_i. Observamos que as diferença $t_f - t_i = \Delta t$ e $|s_f - s_i| = |\Delta s|$ formam os catetos de um triângulo retângulo que tem como vértices I e F.

Como t_f é fisicamente sempre maior que t_i, o comprimento do cateto horizontal é Δt. O mesmo não é verdade para o comprimento em que ora o Δs pode ser positivo (como na Figura 3.13) quanto pode ser negativo (no caso de $s_f < s_i$), sendo assim o comprimento do outro cateto vertical será $|\Delta s|$.

Tendo encontrado as representações gráficas das variações de espaço e tempo, conseguiremos observar geometricamente a velocidade média se lembrarmos que

$$|v_m| = \left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right| = \frac{|\Delta s|}{|\Delta t|},$$

e como $\Delta t > 0$, então, $|\Delta t| = \Delta t$, resultando em

$$|v_m| = \frac{|\Delta s|}{\Delta t}.$$

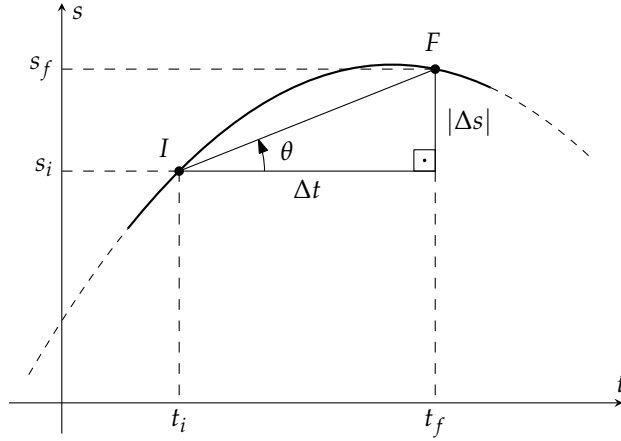



Figura 3.13: Gráfico $t \times s$ para observação da velocidade média.

E ao definirmos θ como o ângulo formado entre a horizontal e a hipotenusa do triângulo retângulo formado pelos vértices I e F e pelos catetos Δt e $|\Delta s|$, como apresentado na Figura 3.13, teremos

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{|\Delta s|}{\Delta t} = |v_m|,$$

de modo que temos finalmente a interpretação geométrica da velocidade média no gráfico $t \times s$.

Para nos livrarmos dos módulos nestas observações geométricas, se definirmos criteriosamente o ângulo θ como o ângulo dextrogiro definido entre o cateto horizontal e a hipotenusa, então

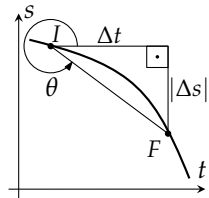



Figura 3.14: Definição de θ como ângulo dextrogiro entre cateto horizontal e hipotenusa no caso de $\Delta s < 0$.

$$\operatorname{tg} \theta = v_m.$$

Nesta definição, caso $\Delta s > 0$ o ângulo se apresentará conforme já vimos na Figura 3.13 e caso $\Delta s < 0$ como na Figura 3.14.

VELOCIDADE MÉDIA NO GRÁFICO $t \times s$ — A TANGENTE

Se $I = (t_i, s_i)$ e $F = (t_f, s_f)$ são os pontos inicial e final em um movimento observado num gráfico $t \times s$, o segmento $\overline{IF}$ define um triângulo retângulo com a horizontal e a vertical do qual é hipotenusa. Se definirmos θ como o ângulo dextrogiro formado entre a horizontal e esta hipotenusa, então,

$$\operatorname{tg}\theta = v_m. \tag{3.10}$$

Outra interpretação, matematicamente mais abstrata, mas que ganha em simplicidade é

VELOCIDADE MÉDIA NO GRÁFICO $t \times s$ — O COEFICIENTE ANGULAR

Se $I = (t_i, s_i)$ e $F = (t_f, s_f)$ são os pontos inicial e final em um movimento observado num gráfico $t \times s$, e a reta

$$r: \quad s = mt + n$$

passa por I e F, então o coeficiente angular m coincide com a velocidade média, ou seja,

$$v_m = m. \tag{3.11}$$

A compreensão desta interpretação é imediata caso se procure pelo coeficiente angular m pela solução do sistema de equações resultante da restrição de que a reta r passe por I e F, que resulta em

$$\begin{cases} s_i = mt_i + n \\ s_f = mt_f + n. \end{cases}$$

A definição de coeficiente angular e interpretações matemáticas semelhantes às feitas nestes tópicos são cobertas pela matemática de ensino médio nos tópicos de função afim, ou polinomial do 1º grau ou em retas estudadas em geometria analítica [4].

Velocidade Instantânea no Gráfico $t \times s$

Agora, para observar o significado da velocidade instantânea no gráfico $t \times s$, vamos empregar a ideia exposta no item iii da seção 3.5.3, e vamos encontrar a velocidade instantânea aumentando progressivamente a precisão de uma medida de velocidade média fazendo Δt diminuir até que tenda a zero.

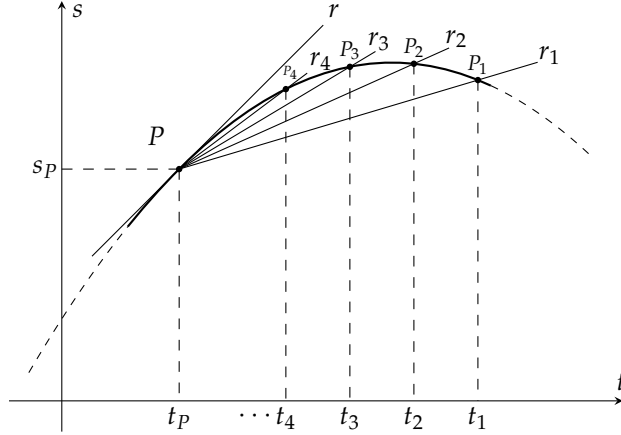



Figura 3.15: Gráfico $t \times s$ para observação da velocidade instantânea.

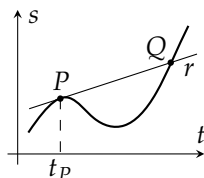
Considerando a Figura 3.15,suponha que desejamos calcular a velocidade instantânea no instante t_P. Como a velocidade instantânea é pontual e a média depende de um início e de um fim, vamos adotar t_P como início e ir aproximando um tempo final, que começaremos por t_1, progressivamente de t_P, fazendo, desta forma, com que Δt diminua.

Ao considerar o início t_P e o fim t_1, o coeficiente angular da reta r_1 seria a velocidade média do movimento de t_P a t_1 e uma primeira aproximação para a velocidade instantânea em t_P. A Figura 3.15 mostra ainda outros instantes $t_4 < t_3 < t_2 < t_1$ que se aproximam progressivamente de t_P, e as retas r_2, r_3 e r_4 que tem coeficientes angulares correspondentes a velocidades médias que servem como aproximações cada vez melhores da velocidade instantânea em t_P. Observe que estas retas intersectam o gráfico em dois ponto, o início (P) e o fim (um dos pontos P_1, P_2, P_3 e P_4) e que a medida que t_i se aproxima de t_P, P_i se aproxima de $P = (t_P, s_P)$.

Não é difícil imaginar que quando Δt se aproxima de 0, P_i se aproxima de P e a reta r_i tende a r, os dois pontos de "início" e "fim" que a reta intersecta o gráfico tendem a coincidir, de modo que r é a reta tangente ao gráfico no ponto P e seu coeficiente angular deixa de ser uma aproximação para ser igual a velocidade instantânea no instante t_P.

Ou seja, a velocidade instantânea no instante t_P é igual ao coeficiente angular da reta que tangencia o gráfico em $P = (t_P, s_P)$.

Em geral, se aprende que a reta tangente é aquela que toca

uma circunferência em apenas um ponto, já que até então só retas tangentes à circunferência foram estudadas. Como um gráfico $t \times s$ qualquer pode ser intrincado, as vezes sequer se encontrará uma reta que toque o gráfico em apenas um ponto, mas nas proximidades do ponto, esta reta tocará o gráfico apenas uma vez.

RETA TANGENTE A UM GRÁFICO

Dizemos que uma reta é tangente a um gráfico no ponto P quando, nas proximidades de P, a reta toca o gráfico o em apenas um ponto.

Figura 3.16: A reta r é tangente ao gráfico no ponto P, mesmo também tocando o gráfico em Q.

Observe, por exemplo, a Figura 3.16, em que a reta r é tangente ao gráfico no ponto P, só depois de decrescer e crescer novamente, ou seja, só depois do gráfico "mudar de comportamento" é que a reta r toca o gráfico novamente em Q, e por isso ela continua a ser considerada a reta tangente pois toca apenas uma vez o gráfico nas vizinhanças de P.

VELOCIDADE INSTANTÂNEA NO GRÁFICO $t \times s$

Se a reta $r : s = mt + n$ é tangente ao gráfico $t \times s$ de um movimento no posnto $P = (t_P, s_P)$, então a velocidade instantânea v_P no instante t_P é

$$v_P = m. \tag{3.12}$$

Gráfico $t \times s$ Linear — Um Caso Particular

Vamos fazer uma breve análise do caso particular em que o gráfico $t \times s$ é uma reta. Conforme mostramos, a velocidade média depende unicamente do coeficiente angular (e portanto da inclinação) da hipotenusa do triângulo formado pelos pontos inicial e final.

É fácil observar pela Figura 3.17 que não interessa onde se escolham o início e o fim sobre a reta, o ângulo θ que a hipotenusa que eles definirão formará com a horizontal será sempre o mesmo. Ou seja, qualquer que seja a escolha particular de início e fim para o estudo, a velocidade média terá sempre um mesmo valor. Além disso, para verificar a velocidade instantânea, não faz sentido falar em "reta tangente", já que a curva

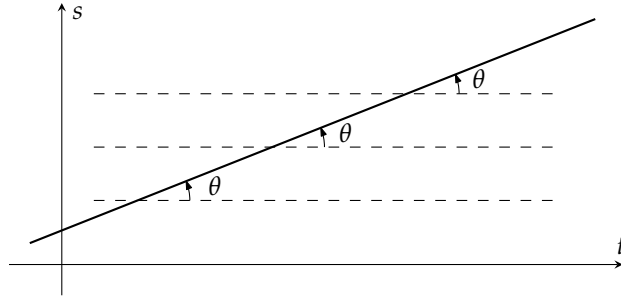



Figura 3.17: Caso particular em que o gráfico $t \times s$ é uma reta.

em si já é uma reta. Não importa o quão afastados estão o início e o fim, ou seja, não importa se Δt é grande ou se tende a zero, a velocidade medida será sempre a mesma e igual a $\operatorname{tg}\theta$.

Isso mostra que no caso particular de o gráfico $t \times s$ ser uma reta, a velocidade instantânea e sempre a mesma (é constante) e é igual a velocidade média. Ou seja, a velocidade média só representa com fidelidade o movimento quando este é executado com velocidade constante, o que é o mesmo que afirmar que

INTERPRETAÇÃO DA VELOCIDADE MÉDIA

Velocidade média é aquela que o corpo deveria manter *constante* para percorrer a distância Δs no tempo Δt.

Esta argumentação suporta a consideração do item v da seção 3.5.3.

3.5.8 Gráfico $t \times v$

Na seção 3.4.2 vimos a forma gráfica mais direta de representar o movimento, que é o gráfico $t \times s$, já que temos discutido que a observação do movimento implica em observar em que momento (tempo) o móvel encontra-se em cada posição (espaço). Ora, uma descrição, que confessamos não ser tão direta, do movimento seria, sabendo onde ele se encontra *em um único instante*, acompanhar para onde ele vai, ou seja, monitorar

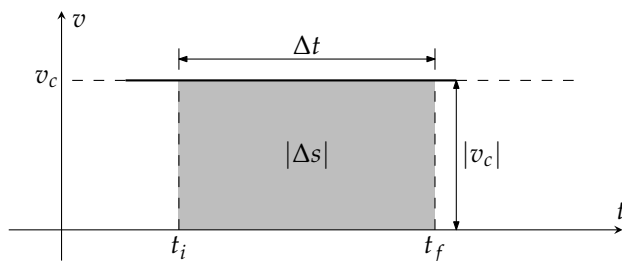



Figura 3.18: Gráfico $t \times v$ para a situação mais simples em que a velocidade é constante e igual a v_c.

sua velocidade. Deste modo, o gráfico $t \times v$ em que a cada ponto do gráfico é um par (t, v) de que velocidade instantânea o móvel tem a cada momento, fornece informações para a descrição do movimento, que será completamente descrito se tivermos, além deste gráfico, pelo menos o conhecimento de onde o móvel se encontra em um instante.

Mais adiante explicaremos em mais detalhes a origem da necessidade de se conhecer onde o móvel se encontra em pelo menos *um único instante*.

Variação de Posição e o Gráfico $t \times v$ — O Caso da Velocidade Constante

Discutimos que o estudo do movimento é feito por meio da associação de tempo e espaço na seção 3.4. Ora, se a velocidade é uma grandeza que traz em si como que uma mistura das informações de tempo e espaço do movimento por meio da razão entre estas grandezas, então, através da observação do comportamento da velocidade ao longo do tempo parece possível resgatar as informações de posição, e portanto, por meio da observação da velocidade, resgatar a descrição do movimento.

Vamos estudar como conhecer a posição por meio do conhecimento do comportamento da velocidade ao longo do tempo com o exemplo inicial mais simples, o caso em que a velocidade é constante e igual a v_c, ou seja $v(t) = v_c$, conforme apresentado no gráfico da Figura 3.18.

Se estamos lidando com um caso em que a velocidade é constante, logo, ela é igual a velocidade média.

$$v_c = v_m.$$

Com esta observação podemos determinar a relação que se

observa entre tempo, velocidade e espaço, já que

$$v_c = v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

ou seja, como o gráfico nos fornece as informações de velocidade e tempo, podemos recuperar o espaço observando que

$$\Delta s = \Delta t \cdot v_c. \tag{3.13}$$

Nota-se que nesta relação a componente de tempo é representada por sua variação Δt, que é dada por $t_f - t_i$. Marcarmos, então, os instantes t_i e t_f no gráfico da Figura 3.18 e observamos que as verticais delimitadas por t_i e t_f e as horizontais delimitadas pelo eixo t e pelo gráfico formam um retângulo, destacado em cinza na Figura 3.18. Os elementos do membro direito da Equação 3.13 aparecem geometricamente no gráfico como a altura $|v_c|$ deste retângulo e sua base Δt. Ao calcular sua área A se obtém

A altura do retângulo é $|v_c|$ pois retratamos na Figura 3.18 um v_c positivo, mas não faz sentido falar em altura negativa de um retângulo no caso de $v_c < 0$, e ainda assim teríamos um retângulo com altura $|v_c|$.

$$A = \Delta t \cdot |v_c|. \tag{3.14}$$

Observando as semelhanças entre as Equações 3.13 e 3.14, vemos que estamos próximos do significado geométrico das relações entre velocidade, tempo e espaço no gráfico $t \times v$. Para finalizar basta-nos verificar a aplicação do módulo em ambos os membros da Equação 3.13 e considerar que como $\Delta t > 0$, então $|\Delta t| = \Delta t$, resultando em

$$\begin{aligned} |\Delta s| &= |\Delta t \cdot v_c| \\ &= |\Delta t| \cdot |v_c| \\ |\Delta s| &= \Delta t \cdot |v_c|. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Comparando os resultados das Equações 3.14 e 3.15, concluímos:

VARIAÇÃO DE POSIÇÃO NO GRÁFICO $t \times v$ — CASO DA VELOCIDADE CONSTANTE

Em um gráfico $t \times v$ de um móvel com velocidade constante v_c, se a área do retângulo definido pelo o eixo horizontal t e o gráfico, e os limites verticais de t_i e t_f é A, então

$$|\Delta s| = A. \tag{3.16}$$

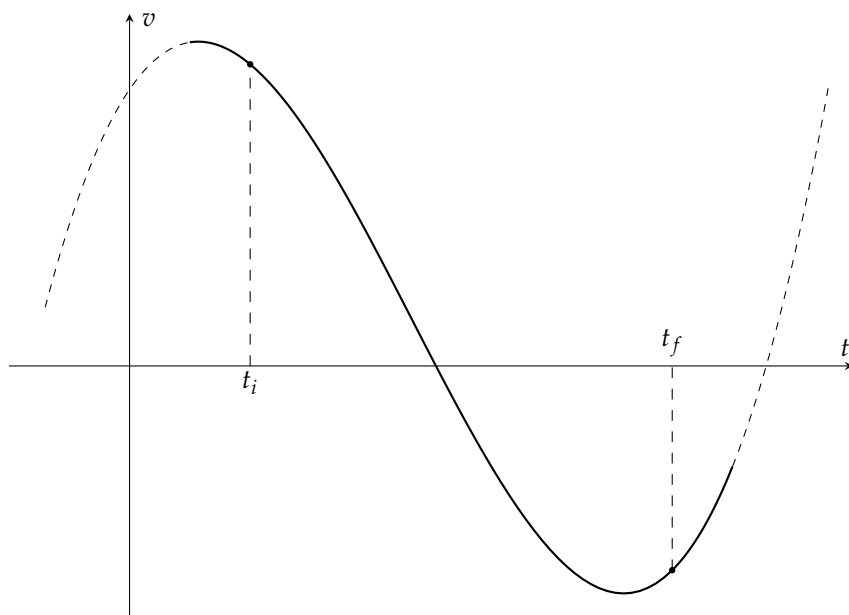



Figura 3.19: Exemplo de esboço de gráfico $t \times v$ em que a velocidade não é constante.

Variação de Posição e o Gráfico $t \times v$ — O Caso Geral

Suponhamos agora que temos um gráfico $t \times v$ mais complexo que o caso em que a velocidade é constante apresentado na Figura 3.18. Como ilustração, vamos considerar uma relação como a esboçada no gráfico da Figura 3.19.

O raciocínio que empregamos no caso em que a velocidade era constante de nada vale aqui, já que se o gráfico for minimamente mais complexo que uma reta de velocidade constante, se fosse por exemplo uma reta de uma velocidade crescente, já não teríamos um retângulo com o qual identificamos geometricamente tão facilmente as grandezas de velocidade e tempo e sua relação com a variação de posição. No caso esboçado na Figura 3.19, então, dificilmente se encontrará qualquer relação geométrica tão simples entre velocidade, tempo e espaço. A solução encontrada foi dividir o gráfico em "pedaços", e forçar que eles tenham características semelhantes ao caso da velocidade constante em que já tivemos sucesso.

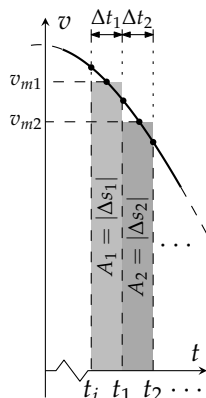



Figura 3.20: Fragmento do gráfico da Figura 3.19 para avaliação da relação entre velocidade, tempo e posição.

Para tal, dividimos o intervalo de t_i a t_f em t_1, t_2, t_3 e assim sucessivamente. De t_i a t_1, chamaremos $\Delta t_1 = t_1 - t_i$ e vamos considerar que a velocidade é constante, e igual a velocidade média no trajeto v_{m1} de modo que mais adiante veremos que escolher a velocidade média no trecho nos garantirá obter um valor com significado físico para o movimento. Desta forma encontramos um retângulo como o denominado A_1 da Figura 3.20.

Encontramos posteriormente a área A_2 de forma completamente análoga, chamando $\Delta t_2 = t_2 - t_1$ e formando o retângulo com a velocidade média no trecho de t_1 a t_2 que chamamos v_{m2}. A construção geométrica até aqui é esboçada no gráfico da Figura 3.20.

Como o $|\Delta s| = |v_m| \cdot \Delta t$, temos certeza que $A_1 = |v_{m1}| \cdot \Delta t_1$ e $A_2 = |v_{m2}| \cdot \Delta t_2$ são iguais a $|\Delta s_1|$ e $|\Delta s_2|$. Se processemos conforme descrito aqui de forma sucessiva, poderíamos achar a variação total de posição Δs somando estas variações parciais, ou subtraindo caso se trate de um trecho em que a velocidade média seja negativa.

A título de ilustração, a Figura 3.21 traz o esboço de uma segmentação completa do trecho de t_i a t_f do gráfico da Figura 3.19. Se as alturas de cada retângulo escolhido foi a velocidade média no trecho, então o Δs de t_i a t_f seria

$$\begin{aligned}\Delta s =& A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 \\ & - A_7 - A_8 - A_9 - A_{10} - A_{11} - A_{12} - A_{13}.\end{aligned}$$

Antes de dar por encerrada a nossa metodologia para estudar o gráfico, somos obrigados a chamar atenção para um detalhe. Nós simplesmente afirmamos que seria escolhida a velocidade média para estipular a altura do retângulo de cada área parcial e isso nos garantiu que conseguimos encontrar variações parciais de posição e consequentemente a variação total caso prosseguíssemos indefinidamente. Assim, trocamos o problema de não saber como identificar as características físicas de velocidade, tempo e posição geometricamente no gráfico por encontrar características que não sabemos calcular, pois, afinal, qual seria a velocidade média em cada trecho se ao longo do trecho esta velocidade pode variar?

O problema de "descobrir" a velocidade média no trecho fica mais fácil a medida que diminuímos o tamanho de cada Δt_j, já que haverá fisicamente maior dificuldade de se variar

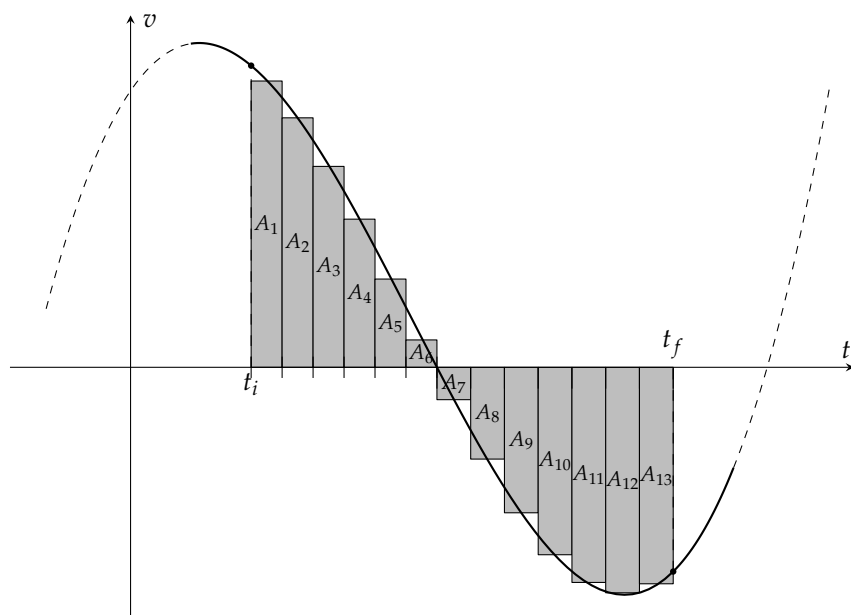



Figura 3.21: Segmenção de todo o gráfico da Figura 3.19

a velocidade em um trecho e a velocidade média será aproximadamente igual a velocidade em qualquer ponto dentro do trecho, já que não havendo tempo para variar, a velocidade dentro de cada trecho permanecerá aproximadamente constante. Ao escolhe um valor qualquer de velocidade dentro do trecho, a área A_j já não será igual ao Δs_j, mas será aproximadamente igual.

Ao se observar a Figura 3.21 pode-se verificar que quando a curva do gráfico cresce ou decresce, parte do gráfico fica dentro do retângulo e parte fica fora. Quando se escolhe um retângulo com altura igual a velocidade média no trecho, o que se faz é com que a área da sobra do retângulo seja igual a parte do gráfico que fica para fora do mesmo. Ao se escolher um valor qualquer de velocidade dentro do trecho cria-se uma diferença entre essas sobras que geram um valor aproximado para a variação de posição.

Se fizermos os $\Delta t_j \to 0$, pode-se imaginar que os retângulos serão tão pequenos que não haverão sobras entre os retângulo (de tão minúsculos) e que não haverá variação de velocidade dentro de cada trecho, afinal, com um $\Delta t \to 0$ tem-se apenas uma velocidade instantânea para se observar. Evidentemente, seriam necessário infinitos destes minúsculos retângulos, mas eles cobririam perfeitamente e exatamente a área entre o gráfico e o eixo t.

Concluímos então com o esboço final exibido na Figura 3.22. A área limitada pelo gráfico, o eixo t e pelos limites verticais em t_i e t_f em que a velocidade é positiva chamamos de $A_{v>0}$ e aquela em que a velocidade é negativa de $A_{v<0}$. Nossa variação de posição de t_i a t_f seria simplesmente

$$\Delta s = A_{v>0} - A_{v<0}.$$

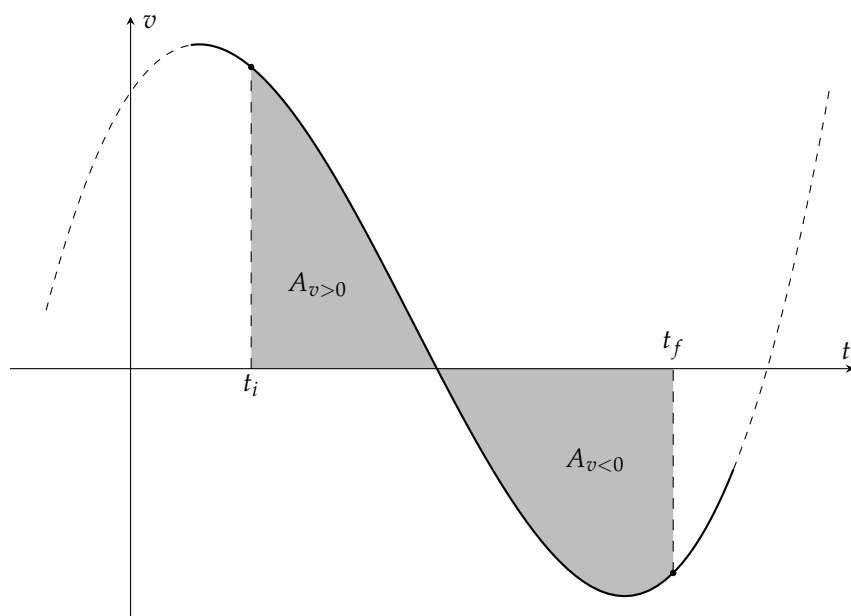



Figura 3.22: Esboço das componentes de área para associação de velocidade, tempo e espaço no gráfico $t \times v$.

VARIAÇÃO DE POSIÇÃO NO GRÁFICO $t \times s$ — CASO GERAL

Em um gráfico $t \times v$, se chamarmos a soma de todas as componentes da área limitada superiormente pelo gráfico, inferiormente pelo eixo t e lateralmente pela verticais determinadas t_i e t_f em que a velocidade é positiva de $A_{v>0}$ e a soma de todas as componentes da área limitada superiormente pelo eixo t, inferiormente pelo gráfico t e lateralmente pela verticais determinadas por t_i e t_f em que a velocidade é negativa de $A_{v<0}$, então

$$\Delta s = A_{v>0} - A_{v<0}. \tag{3.17}$$

Determinação da Posição em um Referencial Determinado

As análises do gráfico $t \times v$ que acabamos de proceder nos forneceram apenas informações sobre a variação de posição. Por esta razão, se nosso desejo é acompanhar os valores da posição dentro de um referencial determinado, digamos s_P, que seja a posição em um t_P, precisaremos de uma posição conhecida s_C que ocorre em t_C, para deste modo, poder considerar, caso $t_C < t_P$, o ponto C como início e o ponto P como fim, e descobrir s_P por

$$s_P = s_C + \Delta s,$$

ou, caso $t_C > t_P$, considerar o ponto C como fim, e o ponto P como início e descobrir s_P por

$$s_P = s_C - \Delta s.$$

De qualquer forma, o conhecimento de um par de valores que localize o móvel no tempo e no espaço, são necessários para caracterizar o movimento dentro do referencial.

O conhecimento do instante aqui é necessário para saber onde se deverá limitar o gráfico $t \times v$ no cálculo do Δs. Assim, ele não aparece explicitamente no cálculo mas é necessário conhecer seu valor.

Referências Bibliográficas

[1] Howard Eves. *Introdução à História da Matemática*. Editora UNICAMP (2004)

[2] reddit.com/user/KTR2 (provável autor). Último acesso em 10 de outubro de 2014.

[3] Francis Galton. *Natural Inheritance*. (1889)

[4] Luiz Roberto Dante. *Matemática: Contexto & Aplicações*. Editora Ática (2008)

[5] youtube.com/watch?v=9xUBhhM4vbM. Último acesso em 10 de outubro de 2014.

[6] Karl Popper. *Logik der Forschung*. Verlag (1935)

[7] Richard Feynman. *The Character of Physical Law*. The M.I.T. Press (1967)

[8] Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (INMETRO). *Vocabulário Internacional de Metrologia*. INMETRO (2012)

[9] Comitê Conjunto para Guias em Metrologia (JCGM). *Avaliação de Dados de Medição - Guia para a Expressão de Incerteza de Medição*. JCGM (2008)

[10] Christoph Schiller. *Motion Mountain, The Adventure of Physics Vol. 1*. (2014)

[11] *Cell size and Scale*. http://learn.genetics.utah.edu/content/cells/scale/. Último acesso em 22 de fevereiro de 2015.

[12] Eirc R. Kandel, James H. Schwartz e Thomas M. Jessell. *Priciples of Neural Sciences*.McGraw-Hill (2000)

Índice Remissivo